

Concours externe d'accès à la 2^{EME} CATEGORIE des professeurs des étab privés MATHEMATIQUES

epreuve ecrite disciplinaire appliquée (Épreuve commune/epreuve écrite 2)

Concours/Examen : CAPESA Épreuve : 2 N° sujet :

Section-option/S spécialité/BAP/Domaine :

CONSIGNES

- Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.
- Indiquer le n° du sujet quand l'épreuve comporte plusieurs sujets au choix.
- Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.
- Numéroté chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) et placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre.
- Rédiger avec un stylo à encre noire.
- N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.

Géométrie repérée dans le plan :

1) pour la question Q1, la bonne réponse est A $(-\frac{3}{2})$

* le distracteur B $(-\frac{2}{3})$:

les élèves peuvent utiliser la mauvaise formule pour calculer la pente : $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ au lieu de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

* le distracteur C $(\frac{3}{2})$:

ne peut tenir compte que de $(0,3)$ à $(2,0)$
on "perd" en hauteur et il faut donc mettre un
signe $(-)$.

pour la question Q2, la bonne réponse est B (3)

* le distracteur A (-3) :

confonde le coefficient directeur avec le coefficient constant c

* le distracteur E (6)

penser que le coefficient directeur est celui de x
dans une équation cartésienne (non réduite),

Pour la question Q3, la bonne réponse est $A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

* le distracteur $B \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$

penser que les coordonnées de la droite $ax+by+c=0$ est donné par $\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ alors que c'est $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$

* le distracteur $C \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

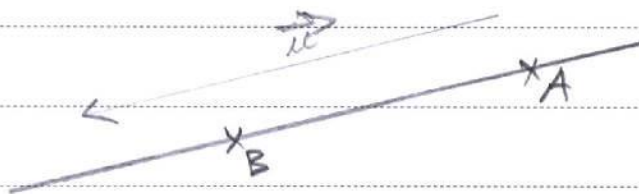
$\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont les coordonnées du vecteur normal (avec une erreur sur le signe de -2)

l'élève peut penser que $(a, -b)$ est un vecteur directeur, (c'est le cas à une permutation près) des coordonnées)

2) Soient A, B deux points du plan

Définition: On appelle un vecteur directeur de la droite

(AB) , tout vecteur $\vec{u}$ colinéaire à $\overrightarrow{AB}$
(non nul)



- 3) Soit (d) une droite du plan, de vecteur directeur $\vec{u}(-\frac{b}{a})$ ^{avec} _{$(a,b) \neq (0,0)$} et passant par un point $A(x_A; y_A)$
 Un point $M(x; y)$ appartient à (d)
 si et seulement si $\vec{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires
 si et seulement si $\begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \end{pmatrix}$ et $(-\frac{b}{a})$ sont colinéaires
 à savoir

$$0 = \begin{vmatrix} x-x_A & -b \\ y-y_A & a \end{vmatrix} = a(x-x_A) - (-b)(y-y_A)$$

$$0 = ax + by - ax_A - by_A$$
 On pose $c = -ax_A - by_A$
 L'équation $ax + by + c = 0$ est dite une équation cartésienne de (d) avec a, b et c des réels et $(a, b) \neq (0, 0)$

- 4) (Δ) a pour vecteur directeur $\vec{u}(\frac{7}{3})$ $(a=3; -b=7)$
 $b=-7$
 donc (Δ) admet une équation cartésienne de la forme $3x - 7y + c = 0$ avec c un réel,
 (Δ) passe par $A(-5; 2)$ alors $3x(-5) - 7x2 + c = 0$
 donc $-15 - 14 + c = 0 \Rightarrow c = 29$
 donc (Δ) a pour équation cartésienne $3x - 7y + 29 = 0$

- 5) a) il a utilisé, pour calculer la pente a ;
 la formule erronée $\frac{y_B - x_B}{x_A - x_A}$ au lieu de $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

• Ce qui donne ici : $\frac{212 - 32}{100 - 0} = 1,8$

b) toutes les conversions $^{\circ}\text{F}$ à $^{\circ}\text{C}$ et réciproquement seront fausses.

c) : "1. Vérifier que $y = 1,8x + 32$ "

- d) Les réussites :
- * penser à une résolution graphique
 - * Avoir ramené l'égalité de températures à une intersection de droites.
 - * Déterminer le parallélisme de droites par leurs coefficients directeurs.

Les erreurs : * le manque d'explications sur la manière de tracer (1) $y = 3,5x + 32$

- * ne pas avoir donné la température réponse, (même si elle va être erronée ici à cause de l'erreur sur la question 1)
- * ne pas vérifier l'égalité algébriquement,

e)

Soit x la température en Celsius, elle ~~serait~~ va correspondre à la même température en Fahrenheit si et seulement si

$$x = 1,8x + 32$$

donc

$$x - 1,8x = 32$$

$$-0,8x = 32$$

donc

$$x = \frac{-32}{0,8} = -40$$

donc -40°C correspond à -40°F

Concours/Examen : CAPESA Épreuve : 2 N° sujet :

Section-option/Spécialité/BAP/Domaine :

CONSIGNES

- Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.
- Indiquer le n° du sujet quand l'épreuve comporte plusieurs sujets au choix.
- Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.
- Numéroté chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) et placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre.
- Rédiger avec un stylo à encre noire.
- N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.

6) a) le script corrigé :

```
def equared(a,b,c,d):
    m=(d-b)/(c-a)
    p=d-m*c
    print("L'équation réduite est y=",m,"x+",p)
```

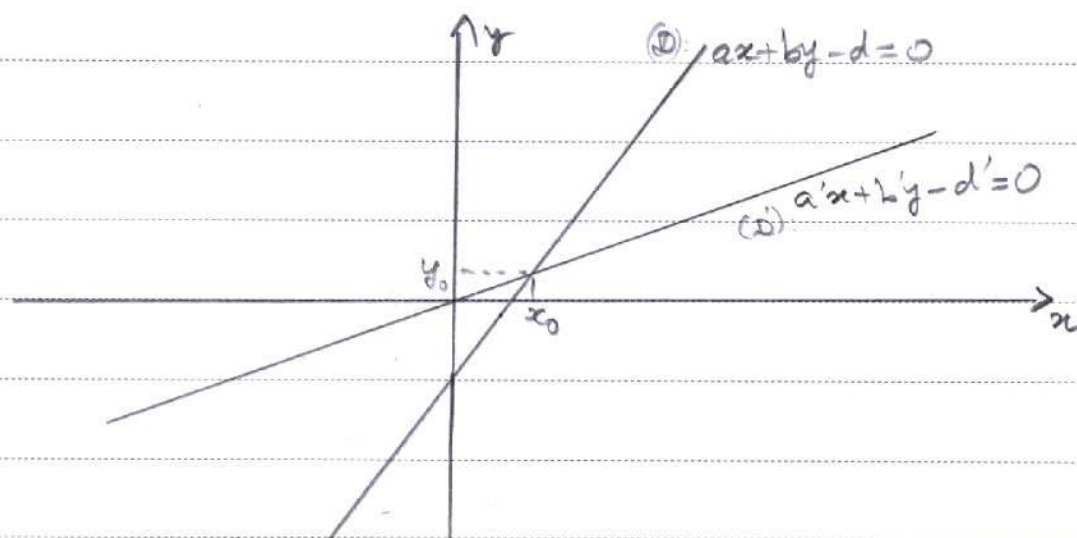
b) l'équation réduite est $y = 2x + 4$

```
c) def equared(a,b,c,d):
    if a!=0:
        m=(d-b)/(c-a)
        p=d-m*c
        print("L'équation réduite est y=",m,"x+",p)
    else:
        print("Une équation de la droite est x=",a)
```

Systèmes d'équations linéaires à deux inconnues.

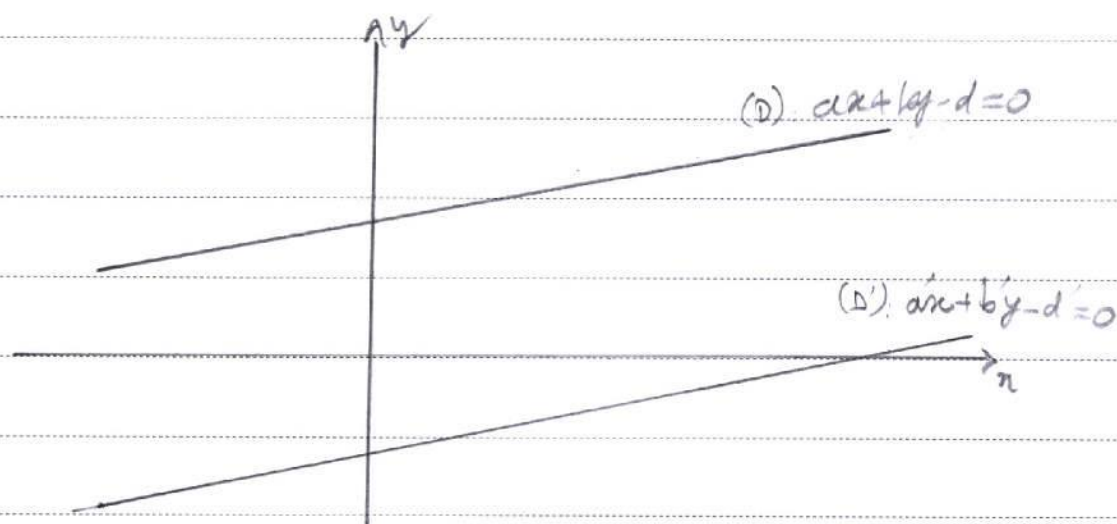
7) $(S): \begin{cases} ax+by=d \\ a'x+b'y=d' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax+by-d=0 \\ a'x+b'y-d'=0 \end{cases}$

1)

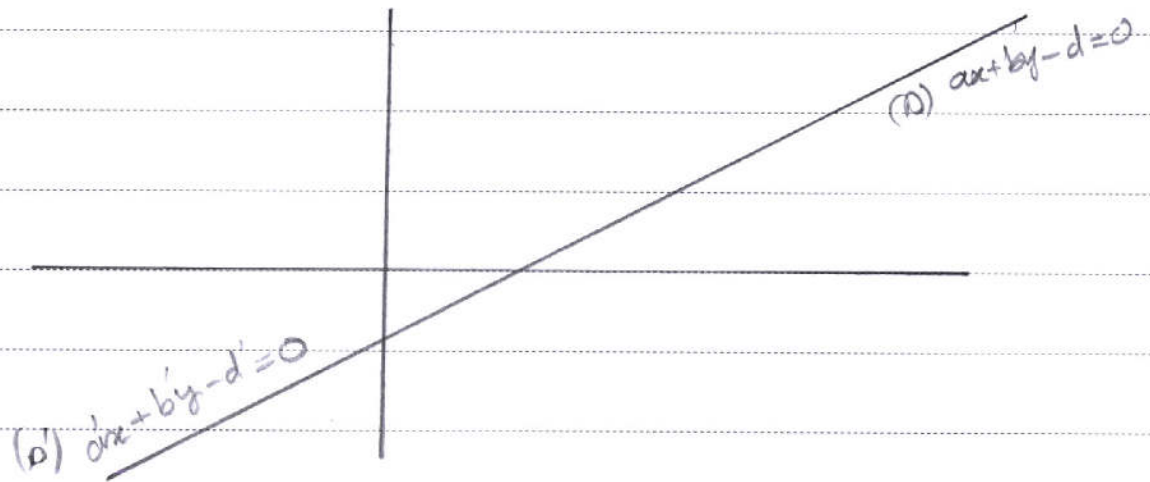


(S) admet une solution $(x_0; y_0)$

2)



les droites sont parallèles, (S) n'admet pas de solution.



les deux droites sont confondues, donc (S) admet une infinité de solutions; $S = \{(x, y) / ax+by-d=0\}$

8) $(S): \begin{cases} 2x - 5y = -26 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$, le système admet une solution car $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$

On va multiplier la première ligne par 2 et la deuxième ligne par 5 on obtient alors

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \times (2x - 5y = -26) \\ 5 \times (x + 2y = 5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 10y = -52 \\ 5x + 10y = 25 \end{cases}$$

On additionne les deux lignes pour remplacer la deuxième ligne

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 10y = -52 \\ (5x + 10y) + (4x - 10y) = -52 + 25 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 10y = -52 \\ 9x = -27 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 10y = -52 \\ x = -\frac{27}{9} = -3 \end{cases}$$

la première équation donne, en remplaçant x ;

$$4x(-3) - 10y = -52 \text{ ainsi } -12 - 10y = -52$$

$$\text{donc } -10y = 1252 = -40$$

$$\text{donc } y = 4$$

Vérifions que $x = -3$ et $y = 4$ sont bien la solution du système

$$\begin{cases} 2(-3) - 5 \times 4 = -6 - 20 = -26 \\ -3 + 2 \times 4 = -3 + 8 = 5 \end{cases}$$

$$\text{donc } S = \{(-3, 4)\}$$

$$a) \quad a) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -20 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } 4A - A^2 = \begin{pmatrix} 8+1 & -20+20 \\ 4-4 & 8+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$b) \quad \text{On a } 4A - A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = 9I$$

$$\text{donc } (4I - A)A = 9I$$

$$\text{donc } A \text{ est inversible et } A^{-1} = \frac{1}{9}(4I - A)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{5}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

$$c) \quad (S): \begin{cases} 2x - 5y = -26 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix} \end{cases}$$

résoudre (S) équivaut à résoudre l'équation $AX = B$

$$\text{avec } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -26 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Concours/Examen : CAPESA Épreuve : 2 N° sujet :
 Section-option/S spécialité/BAP/Domaine : Mathématiques

CONSIGNES

- Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.
- Indiquer le n° du sujet quand l'épreuve comporte plusieurs sujets au choix.
- Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.
- Numéroté chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) et placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre.
- Rédiger avec un stylo à encre noire.
- N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.

d)

$$(\mathcal{S}) \Leftrightarrow AX = B$$

$$\Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$\Leftrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B$$

$$\Leftrightarrow IX = A^{-1}B$$

$$\Leftrightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2/9 & 5/9 \\ -1/9 & 2/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -26 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } X = \begin{pmatrix} \frac{2 \times (-26) + 5 \times 5}{9} \\ \frac{-26 + 2 \times 5}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-52 + 25}{9} \\ \frac{36}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-27}{9} \\ \frac{36}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } S = \{(-3, 4)\}$$

Taux de variation et nombre d'itérations

10) On peut assimiler le gain en masse du lapin, ou lapin parcourant une droite graduée en grammes plus il gagne relativement vite par rapport à une période donnée, plus il parcourra cette droite plus vite, on peut donc parler de vitesse, moyenne, car la mesure se fait par période de 20 jours

2.123

11)

3) a)

la vitesse moyenne de croissance pendant la troisième période est 37,1 grammes/jour

Si cette vitesse reste constante entre le 60^{ème} jour et le 80^{ème} jour, alors le lapin va

gagner, sur cet intervalle de 20 jours

la masse $20 \times 37,1 = 742$ grammes

sa masse à 80 jours serait alors de

$$1665 + 742 = 2407 \text{ grammes.}$$

3) b) M8 a pour ordonnée 2360 < 2407

3) c) la vitesse moyenne pendant la quatrième période est plus basse que celle de la troisième période, et la vitesse pour les périodes suivantes (5^{ème}, 6^{ème}, ...)

continue de baisser, par exemple pour la période [160 jours ; 180 jours]

le GMA est d'ailleurs $\frac{3843 - 3741}{180 - 160} = 5,1 \text{ g/jour}$
(7 fois moins que GMA de la 3^{ème} période)

12)

dans la partie A, on parlait de vitesse moyenne
car on mesurait la différence de gain, en masse,
sur une longue période (20 jours),
ici dans la partie B, ~~le gain est mesuré~~
la différence de gain est mesurée sur une
période très courte (1 jour)

13)

B) 4) la tangente à C_f ^{au point d'abscisse 20} ~~passer~~ par les points
 $M_2(20; 344)$ et $(160; 3500)$

$$\text{donc } f'(20) = \frac{3500 - 344}{160 - 20} \approx 22,54$$

la tangente à C_f au point d'abscisse 140
passe par $M_{14}(140, 3576)$ et $(180; 4000)$

$$\text{donc } f'(140) = \frac{4000 - 3576}{180 - 140} = 10,6$$

5) la vitesse de croissance des lapins :

au 20^{ème} jour : 22,54 grammes/jour

au 140^{ème} jour : 10,6 grammes/jour

14)

prenez la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

Soit a un réel et h un réel non nul.

Calculons d'abord $f(a+h)$.

$$f(a+h) = (a+h)^2 = a^2 + 2ah + h^2$$

$\tau(h)$ est le coefficient directeur de la droite passant par $(a; a^2)$ et $(a+h; a^2 + 2ah + h^2)$

$\tau(h)$ se calcule ainsi :

$$\tau(h) = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{a+h - a} = \frac{2ah + h^2}{h} = \frac{h(2a+h)}{h}$$

$$\text{donc } \tau(h) = 2a + h$$

si on fait tendre h vers 0 alors on obtient

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = 2a \quad \left(\text{on met } h=0 \text{ dans l'expression (sans dénominateur) de } \tau(h) \right)$$

donc f est dérivable en a et

$$f'(a) = 2a$$

$$[\text{par exemple } f'(1) = 2; f'(-5) = -10].$$

15)

Calcul de $\tau(h)$ pour $a \geq 0$ et $h \neq 0$ avec $a+h \geq 0$

$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{a+h - a} = \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h}$$

$$= \frac{(\sqrt{a+h} - \sqrt{a})(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} = \frac{a+h - a}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}$$

$$= \frac{h}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}$$

.... /

Concours/Examen : **CAPESA** Épreuve : **2** N° sujet :

Section-option/S spécialité/BAP/Domaine :

CONSIGNES

- Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.
- Indiquer le n° du sujet quand l'épreuve comporte plusieurs sujets au choix.
- Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.
- Numéroté chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) et placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre.
- Rédiger avec un stylo à encre noire.
- N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.

$$\text{donc } T(h) = \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} T(h) = \frac{1}{2\sqrt{a}}, \text{ donc } f \text{ est dérivable en } a$$

$$\text{et } f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

16) simplifier ou réduire le numérateur
 pour pouvoir faire disparaître h du dénominateur
 s'ils ne sont pas familiarisés avec la technique
 de multiplication par le conjugué pour les
 racines carrées, la simplification de $T(h)$
 est impossible.

Géométrie du plan

17)

" il existe un point G vérifiant l'égalité

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}, \text{ ce point est appelé}$$

le centre de gravité du triangle ABC "

18)

a)

Définition: Une homothétie h de centre Ω et de rapport k avec k un réel non nul, est la transformation du plan, qui à chaque point M fait correspondre un point M' défini par l'égalité vectorielle:

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$$

b)

3) Soit M l'image de A par h

$$\text{alors } \overrightarrow{GM} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{GA}$$

$$= -\frac{1}{2} (-\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC}) \quad (\text{car } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0})$$

$$= \frac{1}{2} (\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$$

$$= \frac{1}{2} (\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{AC}) \quad (\text{Charles})$$

$$= \frac{1}{2} (2\overrightarrow{GA'}) \quad \begin{matrix} (\text{car } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}) \\ (\text{car } A' \text{ milieu de } [BC]) \end{matrix}$$

$$\text{donc } \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{GA'} \quad \text{donc } M = A'$$

l'image de A par h est le point A' milieu de $[BC]$.

Ajustement d'un nuage de points

19)

Les réussites :

- * la droite "ou juge" est plutôt bien faite.
- * la lecture graphique de l'abscisse d'un point sur une droite.
- * les bonnes formules pour le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine.

Les erreurs :

- + la droite d'ajustement tracée est celle de C en M

- + le manque de légende
- + l'équation de la droite ^{réduite} et à donner sous forme de $y = mx + p$ (pas seulement $mx + p$)
- + il n'est pas obligé de tracer la droite en passant forcément par des points du nuage :
- + erreur sur le $a = \frac{11}{9}$

26)

Q1 : Modélisez (Traduire un tableau de valeurs en un graphe)

Q2

Représenter (passer du registre numérique au registre géométrique)

~~Q2~~

Q3

Q4

Calculer

(contrôle le calcul au moyen de comparaison d'ordre de grandeur)

~~Q4~~

21)

Temps (x_i) en heures	0	1	2	4	5	6
Nombre y_i en Lutetias (en millions)	10	15	26	85	171	550
$\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$	-	5	11	59	86	379

On remarque les pentes de ce nuage de points croissent très vite, un ajustement affine ne semble pas opportun.

22)

x_i	0	1	2	4	5	6
$z_i = \ln(y_i)$	2,3026	2,7081	3,2581	4,4427	5,1417	6,3079

L'équation de régression de z en x est

$$z = 0,645x + 2,09 \quad (\text{par la calculatrice})$$

donc $\ln(y) = 0,65x + 2,09$

ainsi $e^{\ln(y)} = e^{0,65x + 2,09}$

donc $y = e^{2,09} e^{0,65x} \quad (A = e^{2,09}, B = 0,65)$

16/23.

Concours/Examen : CAPESA Épreuve : N° sujet :

Section-option/Spécialité/BAP/Domaine :

CONSIGNES

- Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.
- Indiquer le n° du sujet quand l'épreuve comporte plusieurs sujets au choix.
- Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.
- Numéroté chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) et placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre.
- Rédiger avec un stylo à encre noire.
- N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.

23) pour Q5) il s'agit de l'interpolation
les valeurs pour 2 heures et 4 heures
sont connues, donc elles fournissent
un ordre de grandeur pour le nombre
de bactérie au bout de 3 heures.
pour Q6) il s'agit d'extrapolation,
la valeur au bout de 9 heures
dépend de la fiabilité et de la pertinence
de notre droite de régression.
(peu de données peut donner lieu potentiellement
à une ^{droite} de régression assez éloignée
et peu exploitable)

Géométrie dans l'espace..

24) Une droite dans l'espace peut admettre
une infinité de représentations paramétriques
(infinité de vecteurs directeurs, aussi bien
qu'une infinité de points sur la droite)

25/ ici $\vec{AB}(3; 1; -2)$ est un vecteur directeur de (AB)

dans a) on a $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur

b) on a $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur

c) on a $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ " " "

d) on a $\begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ " " "

dans b) et c) les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires à $\vec{AB}$, on peut donc exclure les réponses b) et c)

dans a) et d) les vecteurs directeurs sont respectivement $\vec{AB}$ et $-2\vec{AB}$ sont a) ou d) peut être la bonne réponse.

il reste à vérifier si A par exemple vérifie

la rep. par de a) cherchons le paramètre t

$$\text{tel que } \begin{cases} 1 = 4 + 3t \\ 0 = -2 + t \\ 3 = -2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 2 \\ t = -3/2 \end{cases} \quad \text{impossible}$$

$$\text{cherchons } t \text{ dans d) } \begin{cases} 1 = 7 - 6t \\ 0 = 2 - 2t \\ 3 = -1 + 4t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ t = 1 \end{cases}$$

donc (AB) a pour représentation paramétrique celle de (d).

26) * si la question est posée sous un QCM
il faudrait prendre ~~un~~ vecteur directeur $\vec{a}(d)$
(ici $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$), ce vecteur est normal au
plan orthogonal à $\vec{a}(d)$, P

donc $P: 2x + y - z + d = 0$
de d on le calcule grâce à $C(0; 1; 2)$.

* Quand on a un QCM
On peut d'abord remplacer les coordonnées
de C dans les quatre équations proposées
(ici on élimine d) et c)
il reste après à faire deux produits
scalaires $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

27) les points A et B sont sur la droite $\begin{cases} y = -1 \\ z = 5 \end{cases}$
le point M_t se déplace sur $[AB)$ (la droite (AB) est dans
l'intersection des plans $(y = -1)$ et $(z = 5)$)
donc $M_t(x_{M_t}; -1; 5)$
la vitesse de déplacement est constante ($v = 1$)
 $\overrightarrow{AB}(2; 0; 0)$ donc $x_{M_t} = \frac{2}{2}t + x_{M_0} = t$ $\leftarrow \left(\frac{\overrightarrow{AM_t} - \overrightarrow{AM_0}}{t} = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} \right)$
 $AB = 2$ $\overrightarrow{AM_t}(x_{M_t} - 0; y_{M_t} + 1; z_{M_t} - 5)$

les points C et D sont dans le plan $x = 11$

donc la droite (CD) est dans le plan $x = 11$

donc $N_t(11; y_{N_t}; z_{N_t})$

N_t se déplace avec une vitesse constante ($v = 1$)

donc $\begin{cases} y_{N_t} = vt + y_{N_0} = t + 0 = t \\ z_{N_t} = vt + z_{N_0} \end{cases}$

N_t se déplace sur la demi-droite $[CD)$
 son ~~vitesse~~ ~~est~~ $\frac{1}{CD}$

$$\frac{\vec{CN}_t - \vec{CN}_0}{t} = \frac{\vec{CD}}{CD}$$

$N_0 = C$ donc $\vec{CN}_t = \frac{t}{CD} \vec{CD} = \frac{t}{5} \vec{CD}$ avec $\vec{CD}(0, 4, 3)$
 $CD = 5$

donc $N_t \left(\begin{matrix} x_C + \frac{t}{5} \times 0 \\ y_C + \frac{t}{5} \times 4 \\ z_C + \frac{t}{5} \times 3 \end{matrix} \right) \Rightarrow N_t \left(\begin{matrix} 11 \\ \frac{4}{5}t = 0,8t \\ 1 + \frac{3}{5}t = 1 + 0,6t \end{matrix} \right)$

28) $M_t N_t^2 = (11-t)^2 + (0,8t+1)^2 + (0,6t-4)^2$

- * s'il utilise le norme de $\vec{M_t N_t}$, $\|\vec{M_t N_t}\|$ qui fait apparaître la racine carrée qui est assez laborieuse à dériver.
- * des problèmes éventuels de calcul des dérivées de U^2
- * Ne pas exclure les valeurs négatives de t , si il n'a pas restreint l'étude à $[0; +\infty[$.

29)

$M_t N_t$ est minimale si et seulement si

$M_t^2 N_t^2$ est minimale,

~~et~~ ~~(38)~~

Concours/Examen : **CAPESA** Épreuve : **2** N° sujet :

Section-option/Spécialité/BAP/Domaine :

CONSIGNES

- Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.
- Indiquer le n° du sujet quand l'épreuve comporte plusieurs sujets au choix.
- Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.
- Numéroté chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) et placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre.
- Rédiger avec un stylo à encre noire.
- N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.

Suite 29)

$$\vec{M_t N_t} (11-t; 0,8t+1; 0,6t-4)$$

donc $M_t^2 N_t^2 = (11-t)^2 + (0,8t+1)^2 + (0,6t-4)^2$

$$= 121 - 22t + t^2 + 0,64t^2 + 1,6t + 1$$

$$+ 0,36t^2 - 4,8t + 16$$

$$= 2t^2 - 22,8t + 138$$

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$
 par $f(t) = 2t^2 - 22,8t + 138$

f est dérivable (car polynôme de 2^{nde} degré)

et $\forall t \in [0; +\infty[\quad f'(t) = 4t - 22,8$

f' s'annule en t tel que $4t - 22,8 = 0$

$$\Leftrightarrow t = 5,7$$

f' change de signe en $t = 5,7$ (car f est
 affiné)
 non constante

~~donc $M_t N_t$~~ donc f admet en $t = 5,7$

Un minimum, et puisque $M_t N_t^2 = f(t)$

Alors $M_t N_t$ est minimale à l'instant 5,7 s

30)

Considérez les points A et B d'affixe respectivement 2 et $-5-i$ et réécrivez l'équation en terme de longueurs de segments.

31)

un nombre complexe Z est réel si et seulement si $Z = \overline{Z}$

$$\text{donc } \frac{z-i}{z+3} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z-i}{z+3} = \overline{\left(\frac{z-i}{z+3}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z-i}{z+3} = \frac{\overline{z}+i}{\overline{z}+3}$$

$$\text{donc } (z-i)(\overline{z}+3) = (\overline{z}+i)(z+3)$$

$$\neq z\overline{z} + 3z - i\overline{z} - 3i = z\overline{z} + 3\overline{z} + iz + 3i$$

$$\text{donc } (3-i)z - (3+i)\overline{z} - 6i = 0$$

$$\text{ou } 3(z-\overline{z}) - i(z+\overline{z}) - 6i = 0$$

$$\text{posons } z = x + iy \text{ avec } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{donc } 3(2iy) - i(2x) - 6i = 0$$

$$\Leftrightarrow 6y - 2x - 6 = 0$$

donc les points M d'affixe z
 vérifiant $\frac{z-i}{z+3} \in \mathbb{R}$ sont sur la droite
 d'équation $6y - 2x - 6 = 0$ (D) ou (D): $3y - x - 3 = 0$

Si un point $M'(x, y)$ est sur (D) et si z est
~~l'affixe~~
 l'affixe de M'
 alors

$$\begin{aligned} \frac{z-i}{z+3} &= \frac{(z-i)(\bar{z}+3)}{|z+3|^2} = \frac{z\bar{z} - i\bar{z} + 3z - 3i}{|z+3|^2} \\ &= \frac{x^2 + y^2 - i(x+iy) + 3(x+iy) - 3i}{|z+3|^2} \\ &= \frac{(x^2 + y^2 + y^2 + 3x) - i(x + 3y - 3)}{|z+3|^2} \end{aligned}$$

mais $M' \in (D)$ donc $\frac{z-i}{z+3} = \frac{x^2 + y^2 + y^2 + 3x}{|z+3|^2} \in \mathbb{R}$

donc les points M tel que
 $\frac{z-i}{z+3} \in \mathbb{R}$ est la droite d'équation
 réduite $y = \frac{1}{3}x + 1$.

