

Concours externe d'accès à la 2^{EME} CATEGORIE des professeurs des étab privés MATHEMATIQUES

epreuve écrite disciplinaire (Épreuve commune/epreuve écrite 1)

Concours/Examen : Épreuve : 1 N° sujet :

Section-option/S spécialité/BAP/Domaine : MATHÉMATIQUES

CONSIGNES

- Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.
- Indiquer le n° du sujet quand l'épreuve comporte plusieurs sujets au choix.
- Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.
- Numéroté chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) et placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre.
- Rédiger avec un stylo à encre noire.
- N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.

Problème 1 : Vrai-Faux.

1. Soit n un entier naturel,

Supposons que n est pair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$

tel que $n = 2k$, alors $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$

Donc n^2 est pair,

par contraposée si n^2 est impair alors n est impair.

Affirmation vraie.

2. Soit n un entier naturel ≥ 2 ,

$$\text{alors } \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \times \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

$$= \prod_{k=2}^n \left(\frac{k^2 - 1}{k^2}\right)$$

$$= \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$$

$$= \left(\prod_{k=2}^n \frac{(k-1)}{k}\right) \left(\prod_{k=2}^n \frac{(k+1)}{k}\right)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Donc } \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) &= \left(\prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k}\right) \left(\prod_{k=2}^n \frac{k+1}{k}\right) \\
 &= \frac{\prod_{k=2}^n (k-1)}{\prod_{k=2}^n k} \times \frac{\prod_{k=2}^n (k+1)}{\prod_{k=2}^n k} \\
 &= \frac{\prod_{k=1}^{n-1} k}{\prod_{k=2}^n k} \times \frac{\prod_{k=3}^{n+1} k}{\prod_{k=2}^n k} \\
 &= \frac{(n-1)!}{n!} \times \frac{(n+1)!}{n!} \\
 &= \frac{1}{n} \times \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}
 \end{aligned}$$

Affirmation Vraie.

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}$,
 $f(x) = x - 1$, Soit (u_n) la suite définie par
 $u_0 = 0$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = f(u_n)$

- * f est croissante sur $\mathbb{R}$
- * $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = -1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
 donc (u_n) est décroissante.

Affirmation Fausse.

4. Soient x, y des réels tels que $x^2 + y^2 = xy$
alors $x^2 + y^2 - xy = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2 \times x \times \frac{y}{2} + y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x \frac{y}{2} + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} y^2 = 0$$

$$\text{donc } \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 = 0 \text{ et } \frac{3}{4} y^2 = 0$$

$$\text{Ainsi } x - \frac{y}{2} = 0 \text{ et } y = 0$$

$$\text{donc } x = y = 0$$

Affirmation Vraie.

5. posons $e^x = X$ avec $X > 0$

$$\text{L'équation } e^{2x} + e^x - 2 = 0 \text{ s'écrit ainsi } \begin{cases} X^2 + X - 2 = 0 \\ X > 0 \end{cases}$$

$$\text{On calcule le discriminant } \Delta = (-1)^2 - 4 \times (-2) \times (1) = 9$$

$$\text{Ainsi on obtient deux solutions, } X_1 = \frac{-1+3}{2} = 1 \text{ et } X_2 = \frac{-1-3}{2} = -2$$

On retient $X_1 = 1$, donc x est solution de l'équation
si et seulement si $e^x = 1$ ainsi $x = 0$

L'équation possède une unique solution dans $\mathbb{R}$.

Affirmation Fausse.

6. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

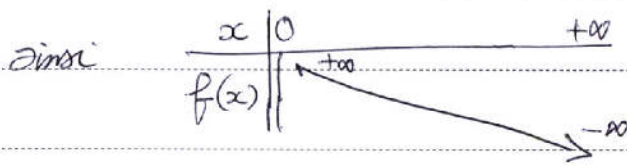
$$\forall x \in]0; +\infty[, f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} - x.$$

f est dérivable sur $]0; +\infty[$

$$\text{de dérivée } \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \frac{-1}{2x\sqrt{x}} - 1 < 0$$

f est alors strictement décroissante sur $]0; +\infty[$,

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \quad \text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$



f est continue, et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$
 et $0 \in]\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow 0} f(x)[$, donc selon
 le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires
 l'équation $1 + \frac{1}{\sqrt{x}} - x = 0$ possède une
 unique solution dans l'intervalle $]0; +\infty[$.

Affirmation Vraie.

7. ~~$\forall x \in]0; +\infty[$~~

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad h(x) = g(2x) - 1 = (e^{2x} - 1) - 1 = e^{2x} - 2$$

$$\text{et puisque } \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad e^{2x} > e^0 = 1$$

$$\text{alors } h(\mathbb{R}_+^*) \subseteq]-1; +\infty[$$

donc $f \circ h$ est bien définie sur $]0; +\infty[$

$$\begin{aligned} \text{et } \forall x \in]0; +\infty[\quad f \circ h(x) &= f(h(x)) \\ &= f(e^{2x} - 2) \\ &= \ln(1 + e^{2x} - 2) \\ &= \ln(e^{2x} - 1) \end{aligned}$$

Affirmation Vraie.

Concours/Examen : **CACHAN** Épreuve : **1** N° sujet :

Section-option/S spécialité/BAP/Domaine :

CONSIGNES

- Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.
- Indiquer le n° du sujet quand l'épreuve comporte plusieurs sujets au choix.
- Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.
- Numéroté chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) et placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre.
- Rédiger avec un stylo à encre noire.
- N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.

8. Soient f, g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) \text{ et } g(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}(x)$$

$$\begin{aligned} \text{Alors } \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x)g(x) &= \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) \times \mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}(x) \\ &= \mathbb{1}_{\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})}(x) = \mathbb{1}_{\emptyset}(x) = 0 \end{aligned}$$

mais ni f ni g ne sont identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.

Affirmation Fausse.

9. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2^x$
 $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) = 2^x = e^{\ln(2)x}$

Ainsi f est dérivable (comme composée de fonctions dérivables)

$$\text{et } \forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \ln(2) e^{\ln(2)x} = \ln(2) 2^x$$

$$f'(0) = \ln(2) \neq 0 \times 2^{0-1}$$

Affirmation Fausse

10. Soit φ la fonction définie sur $]0; +\infty[$

$$\text{par } \forall t \in]0; +\infty[\quad \varphi(t) = \frac{e^t}{t}$$

φ est continue, Soit F une primitive de φ

Alors $\forall x \in]0; +\infty[$ $g(x) = \int_{1/x}^x \frac{e^t}{t} dt = F(x) - F\left(\frac{1}{x}\right)$

Donc g est dérivable (car somme d'une fonction dérivable F et d'une composée de fonctions dérivables (F et $\mathbb{R} \rightarrow \frac{1}{x}$)) sur $]0; +\infty[$

Ainsi $\forall x \in]0; +\infty[$ $g'(x) = F'(x) - \left(-\frac{1}{x^2}\right) F'\left(\frac{1}{x}\right)$

$$= \varphi(x) + \frac{1}{x^2} \varphi\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{e^x}{x} + \frac{1}{x^2} \left(\frac{e^{1/x}}{1/x} \right)$$

$$= \frac{e^x}{x} + \frac{e^{1/x}}{x} = \frac{e^x + e^{1/x}}{x}$$

Affirmation Fausse.

11. On va faire un changement de variable

$u = b+a-x$, pour $x=a$; $u=b$
 pour $x=b$; $u=a$ et $du = -dx$
 $a+b-u = x$

Donc $\int_a^b x f(x) dx = \int_b^a (a+b-u) f(a+b-u) (-du)$

$$= \int_a^b (b+a-u) f(b+a-u) du$$

$$= \int_a^b (b+a-u) f(u) du$$

$$= \int_a^b (b+a) f(u) du - \int_a^b u f(u) du$$

$$= \int_a^b (b+a) f(x) dx - \int_a^b x f(x) dx$$

Ainsi $2 \int_a^b x f(x) = \int_a^b (a+b) f(x) dx$

Ainsi $\int_a^b x f(x) dx = \left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b f(x) dx$.

Affirmation Vraie

12. L'équation caractéristique, de l'équation différentielle
(E): $y'' - 2y' + y = 0$

est $r^2 - 2r + 1 = 0$, qui a pour solutions
 $r = 1$ (unique racine)

Ainsi les solutions de (E) sont

$$S = \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid x \mapsto (K_1 + K_2 x)e^x \mid K_1, K_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Affirmation Fausse.

13. z est imaginaire pur si et seulement si

$$z = -\bar{z}$$

Ainsi $z\bar{z} + 2(z+i) + \bar{z}(2+3i) + 1 = -\bar{z}z - \bar{z}(2+i) - z(2+3i) - 1$

Ainsi

$$2z\bar{z} + z(2+i+2-3i) + \bar{z}(2+3i+2-i) + 2 = 0$$

$$2z\bar{z} + z(4-2i) + \bar{z}(4+2i) + 2 = 0$$

$$z\bar{z} + z(2-i) + \bar{z}(2+i) + 1 = 0$$

$$z\bar{z} + 2(z+\bar{z}) + i(\bar{z}-z) + 1 = 0$$

posons $z = x + iy$ avec x et y des réels,

alors $z = -\bar{z} \Leftrightarrow x + iy + 2x + 2y + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y+1)^2 = 4$$

donc Les points M d'affixe z tel que z soit un imaginaire pur est le cercle de centre I d'affixe $-2-i$

Affirmation Fausse

14. Utilisons le théorème d'EL-KASHI,

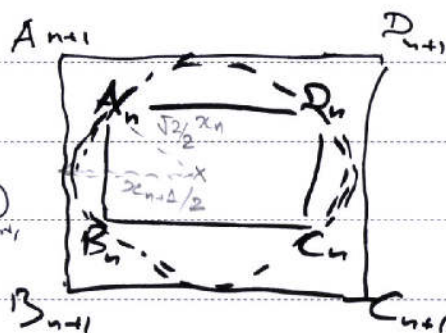
$$\begin{aligned}
 AB^2 &= BC^2 + AC^2 - 2BC \times AC \times \cos(\widehat{ACB}) \\
 &= 9 + 16 - 2 \times 3 \times 4 \times \cos(30^\circ) \\
 &= 25 - 24 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{50 - 24\sqrt{3}}{2} \\
 AB^2 &= 25 - 12\sqrt{3} \\
 AB &= \sqrt{25 - 12\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

Affirmation Fausse.

15.

Soit x_n le côté du carré

$A_n B_n C_n D_n$ celui du carré $A_{n+1} B_{n+1} C_{n+1} D_{n+1}$ et x_{n+1} celui du carré $A_{n+1} B_{n+1} C_{n+1} D_{n+1}$



L'aire du disque est :

$$A_{\text{disque}} = \left(\frac{\sqrt{2} x_n}{2} \right)^2 \pi = \frac{\pi}{2} x_n^2$$

$$\text{Ou } A_{\text{disque}} = \left(\frac{x_{n+1}}{2} \right)^2 \pi = \pi \frac{x_{n+1}^2}{4}$$

$$\text{Ainsi } x_{n+1}^2 = 2 x_n^2 \quad \text{Ou } \text{Aire}(A_{n+1} B_{n+1} C_{n+1} D_{n+1}) = 2 \text{Aire}(A_n B_n C_n D_n)$$

Donc $(\text{Aire}(A_n B_n C_n D_n))$ est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $\text{Aire}(A_0 B_0 C_0 D_0) = 1$

$$\text{Ainsi } \text{Aire}(A_{2024} B_{2024} C_{2024} D_{2024}) = 2^{2024}$$

Affirmation Vraie.

Concours/Examen : Épreuve : N° sujet :

Section-option/S spécialité/BAP/Domaine :

CONSIGNES

- Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.
- Indiquer le n° du sujet quand l'épreuve comporte plusieurs sujets au choix.
- Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.
- Numéroté chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) et placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre.
- Rédiger avec un stylo à encre noire.
- N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.

16. a) Une représentation paramétrique de la droite

$$(\mathcal{D}) \text{ est } \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

et $(\forall t \in \mathbb{R}) \quad (2-t) - (1) + 2(t) = 1+t$

donc la droite $(\mathcal{D})$ n'est pas incluse dans $\mathcal{P}$

Affirmation Fausse.

16. b) Un vecteur directeur à $(\mathcal{D})$ est $\vec{v} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{smallmatrix} \right)$

Un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est $\vec{n} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{smallmatrix} \right) = \vec{v}$

donc $(\mathcal{D})$ est orthogonal à $\mathcal{P}$

Affirmation Vraie.

17) si X_1 et X_2 sont deux points du plan $\mathcal{P}$ alors

$$\{ M \in \mathcal{P} \mid \overrightarrow{MX_1} \cdot \overrightarrow{MX_2} = 0 \} = \text{Cercle de diamètre } [X_1 X_2]$$

(car si I le milieu de $[X_1 X_2]$ alors $\overrightarrow{MX_1} \cdot \overrightarrow{MX_2} = MI^2 - \frac{X_1 X_2^2}{4}$)

$(\Rightarrow)$ donc si ABCD est un rectangle.

alors $\Gamma_1 = \text{Cercle de diamètre } [AC]$ et puisque
(de centre le centre de ABCD)

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

$$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$$

alors B, D sont dans Γ_1 donc Γ_1 est encore

le cercle de diamètre $[BD]$ ainsi $r_1 = r_2$

($\Leftarrow$) si $r_1 = r_2$ alors A, B, C et D sont un même cercle et puisque $[AC]$ et $[BD]$ sont des diamètres dans ce cercle alors $[AC]$ et $[BD]$ s'intersectent en leur milieu et $AC = BD$

Conclusion $ABCD$ est un rectangle.

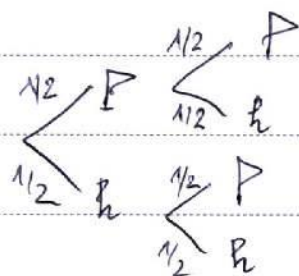
Affirmation Vraie.

Problème 2 : La transmission génétique.

1. a) P si $\text{rand}(1) < 0,5$ sinon h

($\text{rand}(1)$ donne des valeurs aléatoires dans $[0;1]$)

b)



On a quatre issues possibles équiprobables
($P-P$), ($P-h$), ($h-P$) et ($h-h$)

$$P(P-P) = \frac{1}{4}$$

$$P(P-h) = \frac{1}{2}$$

$$P(h-h) = \frac{1}{4}$$

c) Dans les dix simulations, pour $P-P$

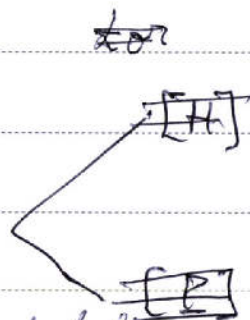
$$\frac{1}{10} \left(\frac{26}{100} + \frac{32}{100} + \dots + \frac{18}{100} \right) = 0,254$$

pour $h-h$: $\frac{1}{10} \left(\frac{23}{100} + \dots + \frac{29}{100} \right) = 0,27$

donc pour $h-P$ $1 - (0,254 + 0,27) = 0,476$

Ces résultats sont cohérents avec le résultat de b).

2) a)



la probabilité que la vache soit de génotype $P-P$

sachant qu'elle est de ~~génotype~~ phénotype $[P]$

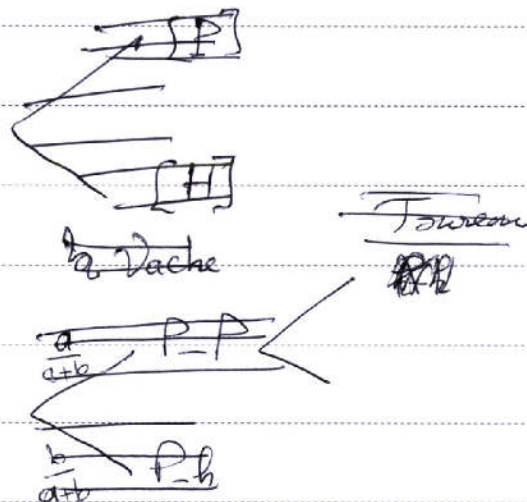
est
$$P(P-P)_{[P]} = \frac{P((P-P) \cap [P])}{P([P])}$$

$$= \frac{P((P-P))}{a+b} = \frac{a}{a+b}$$

la probabilité que la vache soit de génotype $h-P$

est
$$P(h-P)_{[P]} = \frac{P((P-h) \cap [P])}{P([P])} = \frac{P(P-h)}{P([P])} = \frac{b}{a+b}$$

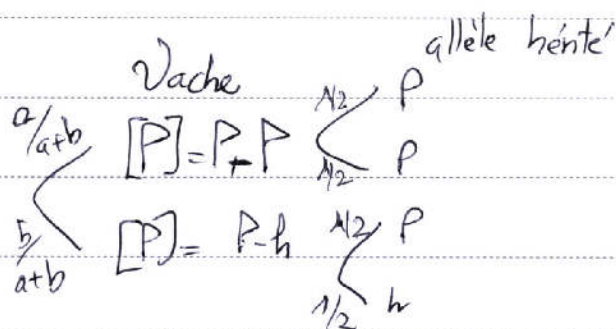
2-b)



l'événement [veau est P-P] = { Vache est P-P }
 $\cup$ { Taureau P-h }

donc $P(\text{veau est P-P}) = \frac{a}{a+b}$

Puisque le veau va hériter d'un allèle h de son père, alors $P(\text{veau soit P-P}) = 0$



$$P(\text{veau soit h-h}) = \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a+b} \right) = \frac{b}{2(a+b)}$$

$$P(\text{veau soit P-h}) = \frac{a}{a+b} + \frac{1}{2} \frac{b}{a+b} = \frac{2b+2a}{2(a+b)}$$

Concours/Examen : Épreuve : N° sujet :

Section-option/S spécialité/BAP/Domaine :

CONSIGNES

- Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.
- Indiquer le n° du sujet quand l'épreuve comporte plusieurs sujets au choix.
- Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.
- Numéroté chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) et placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre.
- Rédiger avec un stylo à encre noire.
- N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.

3).

$$\begin{aligned} P(\text{veau soit } P-P) &= P(\text{veau soit } P-P \cap \text{Tauveau soit } P-P) \\ &\quad + P(\text{veau soit } P-P \cap \text{Tauveau soit } h-P) \\ &= P(\text{veau soit } P-P | \text{Tauveau } P-P) P(\text{Tauveau } P-P) \\ &\quad + P(\text{veau soit } P-P | \text{Tauveau } h-P) P(\text{Tauveau } h-P) \end{aligned}$$

Calcul de $P(\text{Tauveau soit } P-P) = \frac{a}{a+b}$
 $P(\text{Tauveau soit } h-P) = \frac{b}{a+b}$

et $P(\text{veau soit } P-P | \text{Tauveau } P-P)$ donne
 par l'arbre :

$$\begin{array}{l} \frac{a}{a+b} \begin{array}{l} P-P \\ P-h \end{array} \begin{array}{l} \frac{a}{a+b} \\ \frac{b}{a+b} \end{array} \begin{array}{l} P \\ h \end{array} \end{array}$$

$$P(\text{veau } P-P | \text{Test } P-P) = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{2(a+b)} = \frac{2a+b}{2(a+b)}$$

$$\begin{aligned} P(\text{veau } P-P | \text{Tauveau } h-P) &= \frac{1}{2} \frac{a}{a+b} + \frac{1}{4} \frac{b}{a+b} \\ &= \frac{2a+b}{4(a+b)} \end{aligned}$$

		Tauveau			
		Jaché		P	h
$\frac{a}{a+b}$ $\frac{b}{a+b}$	P-P	P			
	P-h	$\frac{P}{h}$			

$$\text{donc } P(\text{Veau et P-h}) = \frac{2a+b}{2(a+b)} \left(\frac{a}{a+b} \right) + \frac{2a+b}{4(a+b)} \frac{b}{(a+b)}$$

$$= \frac{2a^2 + ab}{2(a+b)^2} + \frac{2ab + b^2}{4(a+b)^2}$$

$$= \frac{4a^2 + b^2 + 4ab}{4(a+b)^2} = \frac{(2a+b)^2}{4(a+b)^2}$$

$$\begin{aligned} P(\text{veau soit h-h}) &= P(\text{veau soit h-h} \cap \text{Taureau est P-h}) \\ &= P(\text{veau soit h-h} \mid \text{Taureau est P-h}) P(\text{Taureau est P-h}) \\ &= \frac{b}{a+b} P(\text{veau soit h-h} \mid \text{Taureau P-h}) \end{aligned}$$

$$= \frac{b}{a+b} \times \frac{1}{4} \frac{b}{(a+b)} = \frac{b^2}{4(a+b)^2}$$

$$\text{Finalement } P(\text{veau soit P-h}) = 1 - \left(\frac{b^2}{4(a+b)^2} + \frac{(2a+b)^2}{4(a+b)^2} \right)$$

$$= \frac{2b^2 + 4ab}{4(a+b)^2} = \frac{b+2a}{2(a+b)}$$

4).

$$\begin{aligned}
 P(\text{veau est P-P}) &= P(\{\text{veau est P-P}\} \cap \{\text{père est [P] et mère est [P]}\}) \\
 &\quad + P(\{\text{veau est P-P}\} \cap \{\text{père est [P] et mère est [H]}\}) \\
 &\quad + P(\{\text{veau est P-P}\} \cap \{\text{mère est [H] et père est [P]}\}) \\
 &= P(\text{veau P-P} \mid \text{père [P] mère [P]}) P(\text{père [P] mère [P]}) \\
 &\quad + P(\text{veau P-P} \mid \text{père [H] mère [P]}) P(\text{père [H] mère [P]}) \\
 &\quad + P(\text{veau P-P} \mid \text{père [P] mère [H]}) P(\text{père [P] mère [H]}) \\
 &= \frac{(2a+b)^2}{4(a+b)^2} \times \frac{1}{4} + \frac{(a+b)^2}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{(a+b)^2}{4} \times \frac{1}{4} \\
 &= \frac{(2a+b)^2}{4(a+b)^2} \times (a+b)^2 = \frac{(2a+b)^2}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(\text{veau est h-h}) &= P(\text{veau h-h} \mid \text{père [H] mère [H]}) \\
 &\quad + P(\text{veau h-h} \mid \text{père [H] mère [P]}) \\
 &\quad + P(\text{veau h-h} \mid \text{père [P] mère [H]}) \\
 &= c^2 + 2 \frac{b}{2(a+b)} \times \frac{(a+b)c}{2(a+b)} \\
 &= c^2 + c^2 = c(b+c) = c(1-a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(\text{veau est h-P}) &= 1 - \frac{(2a+b)^2}{4} - c(1-a) \\
 &= 1 - \frac{(a+1-c)^2}{4} - c(1-a) \\
 &= \frac{4 - (a+1-c)^2 - 4c(1-a)}{4}
 \end{aligned}$$

Concours/Examen : Épreuve : N° sujet :

Section-option/Spécialité/BAP/Domaine :

CONSIGNES

- Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.
- Indiquer le n° du sujet quand l'épreuve comporte plusieurs sujets au choix.
- Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.
- Numéroté chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) et placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre.
- Rédiger avec un stylo à encre noire.
- N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.

Problème 3: La transmission d'une information:

Partie A:

1).

```
def factorielle(n):  
    if n == 0 :  
        return 1  
    else :  
        f = 1  
        for i in range(1, n+1):  
            f = f * i  
        return f
```

2).

```
def Coefbinom(n, k):  
    return factorielle(n) / factorielle(k)  
    if (n >= k):  
        return factorielle(n) / (factorielle(k) * factorielle(n-k))  
    else :  
        return 0
```

3). On peut remarquer que si $M \in \mathbb{N}^*$ alors $M+1 = \prod_{k=1}^{M+1} k = (M+1) \prod_{k=1}^M k = (M+1)M!$

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $k \leq m$ c'est encore vraie pour $M=0$ donc $\forall M \in \mathbb{N} \quad (M+1)! = (M+1)M!$

$$\frac{n}{k} \binom{m-1}{k-1} = \frac{n}{k} \frac{(m-1)!}{(k-1)! ((m-1)-(k-1))!}$$

$$= \frac{n!}{k! (m-k)!} = \binom{n}{k}$$

4).

$$E(X) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \quad (\text{d'après A-3})$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} n \binom{n-1}{k} p^{k+1} (1-p)^{n-(k+1)} \quad (\text{changement d'indice})$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} n \binom{n-1}{k} p p^k (1-p)^{(n-1)-k}$$

$$= np \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{(n-1)-k} = np (p + (1-p))^{n-1}$$

$$f(x) = np$$

binôme de Newton

5)

$$a) I_0(a) = \int_0^a f_0(x) dx = \int_0^a e^{-x} dx$$

$$= [-e^{-x}]_0^a = 1 - e^{-a}$$

$$b) \forall n \in \mathbb{N}; I_n(1) = \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \frac{x^n}{n!} e^{-x} dx$$

$$\forall x \in [0, 1] \quad e^{-x} \leq 1 \quad \text{donc } \forall x \in [0, 1] \quad 0 \leq \frac{x^n e^{-x}}{n!} \leq \frac{x^n}{n!}$$

par croissance de l'intégrale :

$$\text{On a } 0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{n!} e^{-x} dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{n!} dx = \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)n!} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\text{Ainsi } \forall n \in \mathbb{N} \quad I_n(1) \in \left[0; \frac{1}{(n+1)!} \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)!} = 0 \quad \text{ainsi par le théorème des} \\ \text{gendarmes } \lim_{n \rightarrow \infty} I_n(1) = 0.$$

$$c) \forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_n(a) = \int_0^a \frac{x^n}{n!} e^{-x} dx$$

$$\text{posons } \begin{array}{ll} U = e^{-x} & U' = -e^{-x} \\ V = \frac{x^n}{n!} & V' = \frac{n x^{n-1}}{n!} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \end{array}$$

par une intégration par parties on obtient

$$I_n(a) = \left[-e^{-x} \times \frac{x^n}{n!} \right]_0^a - \int_0^a -e^{-x} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} dx$$

$$= \frac{-e^{-a} a^n}{n!} + I_{n-1}(a)$$

d)

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad I_k(a) = -\frac{a^k}{k!} e^{-a} + I_{k-1}(a)$$

$$I_k(a) - I_{k-1}(a) = -\frac{a^k}{k!} e^{-a}$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$ donc $\sum_{k=1}^n (I_k(a) - I_{k-1}(a)) = -e^{-a} \sum_{k=1}^n \frac{a^k}{k!}$

$$I_n(a) - I_0(a) = -\sum_{k=1}^n \frac{a^k}{k!} e^{-a}$$

mais $I_0(a) = 1 - e^{-a} = 1 - \frac{a^0}{0!} e^{-a}$

Ainsi $I_n(a) = 1 - \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!} e^{-a}$

e) On a $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!} e^{-a} = 1 - I_n(a)$

en particulier $\sum_{k=0}^n \frac{1^k}{k!} e^{-1} = 1 - I_n(1)$

Ainsi $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e(1 - I_n(1))$

$(I_n(1))_{n \geq 0}$ converge donc $(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!})_{n \geq 0}$ converge

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e(1 - I_n(1)) = e$

f)

Concours/Examen : Épreuve : N° sujet :

Section-option/Spécialité/BAP/Domaine :

CONSIGNES

- Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.
- Indiquer le n° du sujet quand l'épreuve comporte plusieurs sujets au choix.
- Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.
- Numéroté chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) et placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre.
- Rédiger avec un stylo à encre noire.
- N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.

f) Soit $n, m > 0$ avec $m > n$

$$\sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

$$= (1 - I_m(1)) - (1 - I_n(1))$$

$$= I_n(1) - I_m(1)$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^n}{n!} - \frac{x^m}{m!} \right) e^{-x} dx \quad \left(x \mapsto \frac{x^n}{n!} - \frac{x^m}{m!} \text{ est positive sur } [0,1] \right.$$

$$\leq \int_0^1 \left(\frac{x^n}{n!} - \frac{x^m}{m!} \right) dx \quad \left(\begin{array}{l} \text{car } x \in [0,1] \\ \frac{x^n}{n!} \geq \frac{x^n}{m!} \geq \frac{x^m}{m!} \end{array} \right)$$

$$\leq \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} \right]_0^1 = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(m+1)!}$$

$$\leq \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)m \times \dots \times (n+1)} \right) \leq \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)m \times \dots \times (n+1)} \right)$$

$$\text{car} \quad \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \geq \frac{1}{(n+1)m \times \dots \times (n+1)}$$

$$\text{donc} \quad \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k!} < \frac{1}{n! (n+1)}, \text{ on fait tendre } m \text{ vers } +\infty$$

$$\text{pour avoir} \quad \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{n! n}$$

$$|u_n - e| = \left| u_n - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \right|$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \right| \leq \frac{1}{n! \cdot n}$$

2) ~~la fonction ci~~ calcule le rang n pour lequel u_n est ~~pour la première fois~~ au plus $\text{loi de } e$ de s ,
~~en d'autres termes~~ elle retourne une approximation de e avec une précision d'au plus s

(si $\frac{1}{n! \cdot n} \leq s$) alors $|u_n - e| \leq s$
 et donc u_n est une valeur à s près de e (au plus)

Partie B

Partie B-1

1). Chaque individu en les ~~10~~ va recevoir l'information émise par A avec une probabilité de succès p
 les valeurs reçues sont indépendantes

On est donc dans les conditions d'un schéma de Bernoulli de paramètre ~~10~~ et p

donc $N \sim Bn(n, p)$

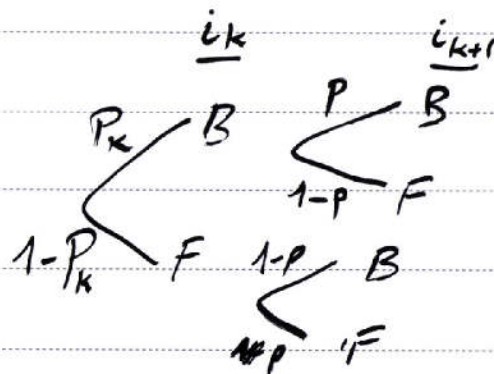
2) a) $E(N) = 80 \times \frac{3}{4} = 60$

2) b)

$$\begin{aligned}
 P(N \geq 70) &= 1 - (P(N=80) + P(N=79) + \dots + P(N=71)) \\
 &= 1 - \sum_{k=71}^{80} \binom{80}{k} \left(\frac{3}{4}\right)^k \left(\frac{1}{4}\right)^{80-k} \\
 &= 1 - \frac{1}{4^{80}} \sum_{k=71}^{80} \binom{80}{k} 3^k = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{80} \sum_{k=0}^9 \binom{80}{k} 3^{-k}
 \end{aligned}$$

Partie B-2

1).



B = la bonne information (celle de i_0)

$F = \overline{B}$

* i_k transmet mal son information avec $1-p$ donc il finit par donner B

donc
$$\begin{aligned}
 p_{k+1} &= p p_k + (1-p)(1-p_k) \\
 &= (2p-1)p_k + (1-p)
 \end{aligned}$$

2).

$$\begin{aligned}
 p_{k+1} - \frac{1}{2} &= (2p-1)p_k + (1-p) - \frac{1}{2} \\
 &= (2p-1)p_k + \frac{1}{2} - p \\
 &= (2p-1)p_k + \frac{1}{2}(1-2p) \\
 &= (2p-1)\left(p_k - \frac{1}{2}\right)
 \end{aligned}$$

3) $\left(p_k - \frac{1}{2}\right)$ est géo de raison $2p-1$ et $p_0 - \frac{1}{2} = p - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

donc
$$p_k - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (2p-1)^k$$

donc
$$p_k = \frac{1}{2} (2p-1)^k + \frac{1}{2}$$

4) $\lim_{k \rightarrow +\infty} p_k = \frac{1}{2}$ car $-1 < 2p-1 < 1$

la probabilité d'une bonne transmission
est ou d'une longue chaîne d'intermédiaire est 50%.

Partie B.3. Transmission sous intermédiaire.

Soit n le nombre d'individus à l'école
1) Soit N le nombre ~~de~~ d'individus
qui ont reçu exactement la valeur
émise par i_0 . (succès)

alors N suit une loi binomiale
de paramètre $(n; p)$ (comme dans B-1)

$$P(N=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$2) P(Y=k) = \sum_{n=0}^{\infty} P(Y=k \text{ et } X=n)$$

L'événement $\{Y=k \text{ et } X=n\}$ pour $n < k$ est impossible

$$\text{donc } P(Y=k) = \sum_{n=k}^{\infty} P(Y=k \text{ et } X=n)$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} P(Y=k) P(X=n)$$

$[Y=k]$ suit la loi
binomiale (n, p)

$$= \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!} (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} p^k$$

$$= \frac{(\lambda p)^k e^{-\lambda}}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!}$$

.... /

Concours/Examen : Épreuve : N° sujet :

Section-option/S spécialité/BAP/Domaine :

CONSIGNES

- Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.
- Indiquer le n° du sujet quand l'épreuve comporte plusieurs sujets au choix.
- Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.
- Numéroté chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) et placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre.
- Rédiger avec un stylo à encre noire.
- N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.

$$\begin{aligned}
 b) \quad P(Y=k) &= \frac{e^{-\lambda} (\lambda p)^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!} \\
 &= \frac{e^{-\lambda} (\lambda p)^k}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^n}{n!} \\
 &= \frac{e^{-\lambda} (\lambda p)^k}{k!} (e^{\lambda(1-p)}) \\
 &= \frac{e^{-\lambda p} (\lambda p)^k}{k!}
 \end{aligned}$$

donc Y suit une loi de Poisson de paramètre λp

$$c) \quad P(Y=0 \cap X=0) + P(Y=0 \cap X>0)$$

$$= P(X=0) + \underbrace{P(Y=0)}_{[X>0]} P(X>0)$$

$$\begin{aligned}
 \boxed{Y=0} \quad P(Y \geq 1) &= 1 - P(Y=0) \\
 &= 1 - e^{-\lambda p}
 \end{aligned}$$

donc la probabilité qu'aucune personne ne soit reçue
 de l'information émise par i_0 est $1 - P(Y \geq 1) = e^{-\lambda p}$

25.128.

