

PLPA 4E CAT MATH PC

Etude de thème(s)

Concours/Examen : PLPA Épreuve : Discipline appliquée N° sujet :

Section-option/Spécialité/BAP/Domaine : mathématiques - physique - chimie

CONSIGNES

- Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.
- Indiquer le n° du sujet quand l'épreuve comporte plusieurs sujets au choix.
- Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.
- Numéroté chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) et placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre.
- Rédiger avec un stylo à encre noire.
- N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.

Problème 1

Partie A

1) Il n'y a qu'une valeur d'effectif par prix donc :

$M = 270 \text{ €}$ car la série peut s'ordonner ainsi :

$$228 \text{ €} < 239 \text{ €} < 270 \text{ €} < 283 \text{ €} < 308 \text{ €}$$

$$\text{et } \mu = \frac{(228 + 239 + 308 + 270 + 283) \text{ €}}{5} = 265,6 \text{ €}$$

2) a - h est une fonction polynôme du second degré de coefficient dominant 1 qui est positif donc la courbe de h est en forme de "U" et h admet bien un minimum sur $\mathbb{R}$.

$$\text{On a } h(x) = \sum_{i=1}^5 (x - x_i)^2 \text{ (où les } x_i \text{ sont les valeurs de la série statistique)}$$

$$\text{Donc } h(x) = \sum_{i=1}^5 x^2 - \sum_{i=1}^5 2xx_i + \sum_{i=1}^5 x_i^2$$

$$\text{Donc le coefficient de } x \text{ n'est autre que } -2 \sum_{i=1}^5 x_i, \text{ soit } -2 \times (228 + 239 + 308 + 270 + 283) = -2656$$

$$\text{Donc le minimum est atteint en } x_0 = \frac{-(-2656)}{2 \times 1} = \frac{2656}{2} = 1328$$

$$\text{Et } h(1328) = 5\,647\,710$$

b - La fonction $x \rightarrow |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$

La somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$. 1. / 19.

Donc g est continue sur $\mathbb{R}$.

$e - x$	$-\infty$	228	239	270	283	308	$+\infty$
$ x-228 $	$-x+228$	ϕ	$\leftarrow$	$x-228$	$\rightarrow$		
$ x-239 $		$-x+239$	ϕ	$\leftarrow$	$x-239$	$\rightarrow$	
$ x-270 $			$-x+270$	ϕ	$\leftarrow$	$x-270$	$\rightarrow$
$ x-283 $			$-x+283$		ϕ	$\leftarrow$	$x-283$
$ x-308 $				$-x+308$		ϕ	$x-308$

Donc :

$$g(x) = \begin{cases} -5x + 1328 & , \text{ si } x \in]-\infty; 228] \\ -3x + 872 & , \text{ si } x \in [228; 239] \\ -x + 394 & , \text{ si } x \in [239; 270] \\ x - 146 & , \text{ si } x \in [270; 283] \\ 3x - 712 & , \text{ si } x \in [283; 308] \\ 5x - 1328 & , \text{ si } x \in [308; +\infty[\end{cases}$$

par somme.

d - μ minimise la somme des distances à la valeur x .

Comme $\mu \in [239; 270]$ on a $\min_{x \in \mathbb{R}} g(x) = \min_{x \in [239; 270]} g(x) = g(265,6)$

$$\min_{x \in \mathbb{R}} g(x) = -265,6 + 394 = 128,4$$

(e - c'est la moyenne !)

Redéfinition $g^o d$: g est une fonction affine

par morceaux et g est continue. Or, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-5x + 1328) = +\infty$ et de même, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (5x - 1328) = +\infty$

Mais g est continue. Donc elle admet un minimum.

(question d) Cela vient aussi du fait qu'en cherchant le minimum sur chaque intervalle, j'ai trouvé $g(x) = 124$ avec $x \in [270, 283]$ et $x \in [239, 270]$ g est donc minimee, ce qui veut dire qu'elle admet un minimum.

$$3) a - \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$f(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2\bar{x}x_i + \bar{x}^2)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n \bar{x}^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i \right)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{x}^2 - \frac{2}{n} \bar{x} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 + \frac{x^2}{n} \sum_{i=1}^n 1 - \frac{2}{n} x \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 + n \times \frac{x^2}{n} - 2x \times \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i}_{\bar{x}}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = x^2 - 2x\bar{x} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2, \text{ ce qu'il fallait démontrer}$$

b- Comme pour 2a, le coefficient dominant du trinôme f est 170 donc f admet un minimum et il est atteint en $x_0 = \frac{-(-2\bar{x})}{2 \times 1} = \frac{2\bar{x}}{2}$
 $x_0 = \boxed{\bar{x}}$. Cela prouve que j'avais raison à la question 2e.

$$c - V = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2\bar{x}x_i + \bar{x}^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{2}{n} \bar{x} \sum_{i=1}^n x_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{x}^2$$

$$V = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \times \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i + \frac{1}{n} n \bar{x}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \times \bar{x} + \bar{x}^2$$

$$V = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2 \quad (\text{formule de Bœnig})$$

$$d - \frac{1}{5} (228^2 + 239^2 + 308^2 + 270^2 + 283^2) = 71\,391,6$$

$$265,6^2 = 70\,543,36$$

$$V_1 = 71\,391,6 - 70\,543,36 = 848,24 \text{ €}^2$$

4) a - $5 \times 265,6 + 4 \times 289 \div 9 = 276 \text{ €}$: montant moyen des recettes sur ces 9 jours

b - D'après la formule de Bœnig, sur les 4 derniers jours, la moyenne des carrés ~~des carrés~~ est $1764 + 289^2 = 85\,285$

Dans l'ensemble des 9 jours, la moyenne des carrés vaut

$$\frac{85\,285 \times 4 + 71\,391,6 \times 5}{9} = 77\,566,4 \leftarrow \text{moyenne par groupes}$$

$$(4 \times 289 + 5 \times 265,6) \div 9 = 276$$

$$276^2 = 76\,176$$

La moyenne des carrés des moyennes vaut $\frac{4 \times 289^2 + 5 \times 265,6^2}{9} = 76\,311,4$

Donc la variance, dans l'ensemble des 9 jours, doit être

$$77\,566,4 - 76\,176 = 1390 \text{ €}^2$$

Partie B

1) Sur $]0; +\infty[$ $\theta'(x) = \frac{5}{x} - \frac{1}{40} \times 2x = \frac{5}{x} - \frac{x}{20}$

$$\theta'(x) = \frac{5 \times 20 - x \times x}{20x} = \frac{100 - x^2}{20x}$$

x	0	10	$+\infty$
20x	+	+	+
100 - x ²	+	0	-
$\theta'(x)$	+	0	-

Concours/Examen : PLPA Épreuve : Discipline appliquée N° sujet :

Section-option/Spécialité/BAP/Domaine : mathématiques - physique - chimie

CONSIGNES

- Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.
- Indiquer le n° du sujet quand l'épreuve comporte plusieurs sujets au choix.
- Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.
- Numéroté chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) et placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre.
- Rédiger avec un stylo à encre noire.
- N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.

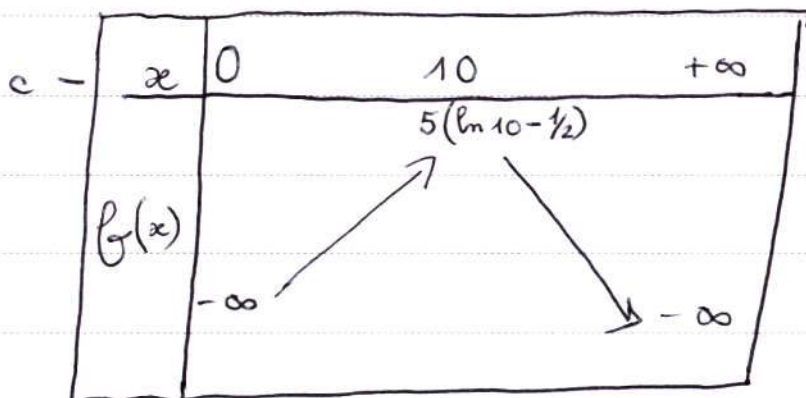
$$b - \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 5 \lim_{x \rightarrow 0} (\ln x) - \frac{0^2}{40} = -\infty \text{ par somme}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 \ln x - \frac{x^2}{40} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 \left(\frac{5 \ln x}{x^2} - \frac{1}{40} \right) \right)$$

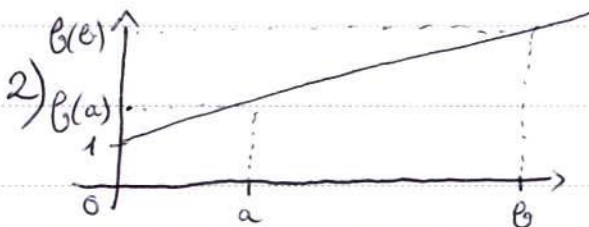
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln x \left(5 - \frac{x^2}{40 \ln x} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 - \frac{1}{40} \frac{x^2}{\ln x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \text{ par produit, car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 - \frac{1}{40} \frac{x^2}{\ln x} \right) = -\infty$$

par somme et
croissances comparées des
fonctions $x \mapsto x^2$ et
 $x \mapsto \ln x$



$$\begin{aligned} \text{et } f(10) &= 5 \ln 10 - \frac{10^2}{40} \\ f(10) &= 5 \ln 10 - \frac{5}{2} \\ f(10) &= 5 \left(\ln 10 - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$



L'intégrale de f entre a et b est donc l'aire du trapèze de sommets $(a; 0)$; $(b; 0)$; $(a; f(a))$ et $(b; f(b))$ qui vaut

$$A = \frac{(\text{petite base}) + (\text{grande base})}{2} \times \text{hauteur} = \frac{f(a) + f(b)}{2} \times (b - a)$$

$$A = \frac{(2a+1) + (2b+1)}{2} \times (b - a) = \frac{2ab - 2a^2 + b - a + 2b^2 - 2ab + b - a}{2}$$

$$A = ab - a^2 + \frac{b-a}{2} + b^2 - ab + \frac{b-a}{2} = b^2 - a^2 + 2 \frac{b-a}{2} + ab - ab$$

$$A = b^2 + b - a^2 - a = (b^2 + b) - (a^2 + a) = H(b) - H(a)$$

car une primitive de la fonction $h: x \mapsto 2x+1$ est

$$H: x \mapsto \frac{2x^2}{2} + x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Soit $H(x) = x^2 + x$ en prenant la primitive de constante nulle
Ce qui est bien l'expression voulue.

3) Un élève de terminale voie professionnelle pourrait proposer de compter le nombre de carrés, puisqu'il y a un quadrillage.

Il y a $6 \times 8 + 7 \times 1 + 6 \times 1 + 5 \times 1 + 3 = 48 + 7 + 6 + 5 + 3 = 69 \text{ m}^2$ de surface au sol minimale

Et $10 \times 9 = 90 \text{ m}^2$ au maximum.

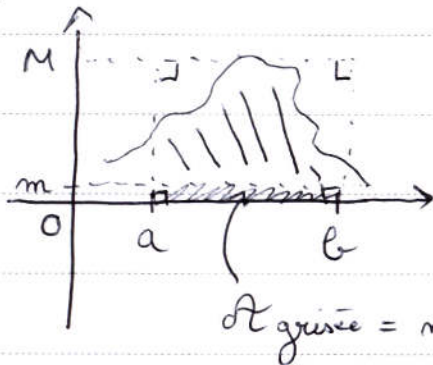
J'ai considéré les rectangles.

$$b - \forall x \in [a, b], m \leq g(x) \leq M$$

$$\Leftrightarrow m(b-a) \leq \underbrace{(b-a)g(x)}_{\text{aire entre les sommets } (a,0), (b,0), (a,x), (b,x)} \leq M(b-a) \text{ (si } b > a)$$

puisque $b > a$

aire entre les sommets $(a,0), (b,0), (a,x), (b,x)$

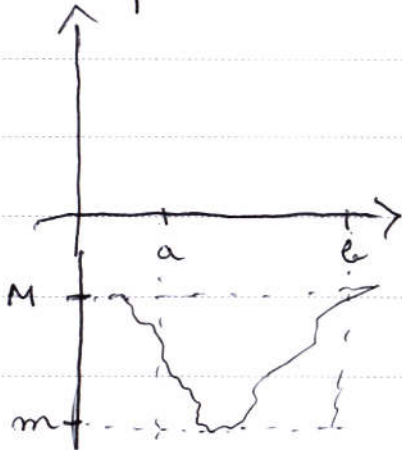


$$\text{Aire grisee} = m(b-a)$$

L'aire du rectangle de sommets $(a,0), (b,0), (a,M), (b,M)$ est $M(b-a)$

Par définition $\int_a^b g(x) dx$ est l'aire avec les hachures et est bien comprise entre les deux autres aires.

Notons que cela reste vrai si $\forall x \in [a, b], g(x) \leq 0$:



c'est alors $M(b-a)$ diminuée en valeur absolue et $m(b-a)$ augmente mais tout est négatif...

(si g est à valeurs tantôt positives,

tantôt négatives, on applique cela sur chacun des sous-intervalles et c'est identique).

c - Le maximum de g est d'après 1c $5(\ln 10 - 1/2)$

Le minimum est soit $g(2)$, soit $g(12)$

$$g(2) = 5 \ln 2 - \frac{2^2}{40} = 5 \ln 2 - \frac{4}{40} = 5 \ln 2 - \frac{1}{10}$$

$$g(12) = 5 \ln 12 - \frac{12^2}{40} = 5 \ln (2 \times 6) - \frac{144}{40} = 5 \ln 2 + 5 \ln 6 - \frac{36}{10}$$

Le minimum est donc $g(2)$ en comparant $g(2)$ et $g(12)$ car $5 \ln 6 - \frac{36}{10} > -0,1$

($6 > e$ car $\ln e = 1$ et $\ln$ est croissante donc $5 \ln 6 > 5 \times 1 = 5$ alors que pour $g(2)$, $-0,1$ est déjà négatif...)

Donc $g(2)(12-2) \leq \int_2^{12} g(x) dx \leq 5(\ln 10 - \frac{1}{2})(12-2)$

Soit $10(5\ln 2 - \frac{1}{2}) \leq \int_2^{12} g(x) dx \leq 10 \times 5(\ln 10 - \frac{1}{2})$

ou : $50\ln 2 - 5 \leq \int_2^{12} g(x) dx \leq 50\ln 10 - 25$

Soit encore :

$$50\ln 2 - 5 \leq \int_2^{12} g(x) dx \leq$$

$$29,66 \leq \int_2^{12} g(x) dx \leq 90,13$$

Donc la surface au sol est d'une aire comprise entre 29,66 et 90,13 m² (c'est moins précis que la méthode de l'élève de Terminale!).

d - On cherche les maximums entre 2 et 8

Entre 2 et 4 : $g(4) = 6,53$ à 10^{-2} près

Entre 4 et 6 : $g(6) = 8,05$ à 10^{-2} près

Entre 6 et 8 : $g(8) = 8,80$ à 10^{-2} près

Et entre 8 et 10 on a ~~$10\ln 2 - \frac{1}{2}$~~ $5(\ln 10 - \frac{1}{2}) \approx 9,01$ à 10^{-2} près

Entre 10 et 12 : $g(12) \approx 8,82$ à 10^{-2} à 10^{-2} près

J'ai utilisé la table de ma calculatrice pour aller plus vite.

Donc : comme $g(2) \approx 3,37$

Soit A_1, A_2, A_3, A_4 et A_5 les intégrales correspondantes.

$$2 \times 3,37 \leq A_1 \leq 2 \times 6,53$$

$$2 \times 6,53 \leq A_2 \leq 2 \times 8,05$$

$$2 \times 8,05 \leq A_3 \leq 2 \times 8,80$$

$$2 \times 8,80 \leq A_4 \leq 2 \times 9,01$$

$$2 \times 8,82 \leq A_5 \leq 2 \times 9,01$$

Concours/Examen : PLPA Épreuve : Discipline appliquée N° sujet :

Section-option/Spécialité/BAP/Domaine : mathématiques - physique - chimie

CONSIGNES

- Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.
- Indiquer le n° du sujet quand l'épreuve comporte plusieurs sujets au choix.
- Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.
- Numéroté chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) et placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre.
- Rédiger avec un stylo à encre noire.
- N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.

Donc :

$$6,74 \leq A_1 \leq 13,06$$

$$13,06 \leq A_2 \leq 16,1$$

$$16,1 \leq A_3 \leq 17,6$$

$$17,6 \leq A_4 \leq 18,02$$

$$17,64 \leq A_5 \leq 18,02$$

Donc $6,74 + 13,06 + 16,1 + 17,6 + 17,64 = 71,14$

Et $13,06 + 16,1 + 17,6 + 18,02 + 18,02 = 82,8$

Donc l'aire de la surface au sol est comprise entre 71,14 et 82,8 m². Cette méthode est bien plus précise, y compris que celle de l'élève.

4) a - La primitive de $x \mapsto \ln x$, $x \mapsto x \ln x - \ln x$, n'est pas au programme de terminale. Sans aide de l'enseignant, qui, pour cet exercice particulier, donnerait la formule de la primitive de $x \mapsto \ln x$, l'élève de terminale de la voie professionnelle sera bloqué pour calculer la primitive de g .

b - Il peut majorer $\ln x$ sur $[2; 12]$: $\max_{x \in [2; 12]} \ln x = \ln 12$

et le minore : $\min_{x \in [2; 12]} \ln x = \ln 2$

et considère l'aire du rectangle $(2; 0); (2; \ln 2), (12; 0), (12; \ln 12)$

(car il sait interpréter l'intégrale d'une fonction continue d'ordre)

Cette partie de l'intégrale de g est donc comprise entre $(12-2) \times \ln 2$ et $(12-2) \times \ln 12$, c'est-à-dire environ entre

$$10 \ln 2 \approx 6,93 \text{ m}^2 \text{ et } 10 \ln 12 \approx 24,85 \text{ m}^2$$

En multipliant par 5 : $50 \ln 2 \leq \int_2^{12} 5 \ln x dx \leq 50 \ln 12$

et en soustrayant l'intégrale $\int_2^{12} \frac{x^2}{40} dx = \left[\frac{1}{3} \frac{1}{40} x^3 \right]_2^{12} = \left[\frac{x^3}{120} \right]_2^{12}$

$$\int_2^{12} \frac{x^2}{40} dx = \frac{12^3 - 2^3}{120} \approx 14,33$$

$$\text{Donc : } \underbrace{50 \ln 2}_{34,66} - \left(\frac{12^3 - 2^3}{120} \right) \leq \int_2^{12} g(x) dx \leq \underbrace{50 \ln 12}_{124,25} - \left(\frac{12^3 - 2^3}{120} \right)$$

$$34,66 - 14,33 \leq \int_2^{12} g(x) dx \leq 124,25 - 14,33$$

$$20,33 \leq \int_2^{12} g(x) dx \leq 109,92$$

Donc on peut encadrer l'aire de la surface du local par $20,33 \text{ m}^2$ à gauche et $109,92 \text{ m}^2$ à droite.

Cependant, pour avoir une seule valeur approchée de cette aire, je pense qu'en classe de Terminale peut proposer d'utiliser la "méthode des trapèzes", c'est-à-dire de la manière suivante :

$$\frac{(\text{petite base}) + (\text{grande base})}{2} \times 10$$

$$y_{\text{out}} \frac{g(2) + g(12)}{2} \times 10 = (g(2) + g(12)) \times 5 = \left(5 \ln 2 - \frac{2^2}{40} + 5 \ln 12 - \frac{12^2}{40}\right)$$

$$\frac{g(2) + g(12)}{2} \times 10 = 25 (\ln 2 + \ln 12) - \frac{5}{40} (2^2 + 12^2)$$

$$\frac{g(2) + g(12)}{2} \times 10 = 25 (\ln 2 + \ln 2 + \ln 6) - \frac{1}{8} (4 + 144) = 25 (3 \ln 2 + \ln 3) - \frac{148}{8}$$

- 18

On trouve que l'aire de la surface au sel est approximativement égale à 60,95 m².

c - La fonction F est dérivable comme somme de fonctions polynomiales et du produit entre une fonction affine et le logarithme népérien sur $]0; +\infty[$ car toutes ces fonctions le sont.

$$\text{On a } F'(x) = 5 \left(1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} \right) - \frac{3x^2}{120} - 5$$

$$\text{Soit } F'(x) = 5 \ln x + 5 - \frac{x^2}{40} - 5 = 5 \ln x - \frac{x^2}{40} = f(x)$$

On a trouvé que f était la dérivée de F donc F est une primitive de f.

$$\begin{aligned} \text{d - } \int_2^{12} f(x) dx &= [F(x)]_2^{12} = F(12) - F(2) = 5 \times 12 \ln 12 - \frac{12^3}{120} - 5 \times 12 \\ &\quad - \left(5 \times 2 \ln 2 - \frac{2^3}{120} - 5 \times 2 \right) \\ \int_2^{12} f(x) dx &= 5 (12 \ln 12 - 2 \ln 2) - \frac{12^3 + 2^3}{120} + 5 (2 - 12) \end{aligned}$$

À la calculatrice, on trouve $\int_2^{12} f(x) dx = 77,7 \text{ m}^2$

Sans la calculatrice, on aurait trouvé $5(22\ln 2 + \ln 3) - \frac{12^3 + 8}{120} - 50$
 soit encore $110\ln 2 + 5\ln 3 - \frac{144 \times 12 + 8 + 50 \times 120}{120}$

$$\int_2^{12} f(x) dx = 110\ln 2 + 5\ln 3 - \frac{1440 + 288 + 8 + 6000}{120} = 110\ln 2 + 5\ln 3 - \frac{7440 + 296}{120}$$

Soit donc: $\int_2^{12} f(x) dx = 110\ln 2 + 5\ln 3 - \frac{7736}{120} = \frac{4560 + 296}{120}$

$$\int_2^{12} f(x) dx = 110\ln 2 + 5\ln 3 - \frac{-4264}{120} = 110\ln 2 + 5\ln 3 + \frac{4264}{120}$$

$$\Rightarrow \int_2^{12} f(x) dx = 110\ln 2 + 5\ln 3 + \frac{1}{120} (2^3 - 12^3 - 50 \times 120)$$

$$\Rightarrow \int_2^{12} f(x) dx = 110\ln 2 + 5\ln 3 + \frac{8 - 1728 - 6000}{120} = 110\ln 2 + 5\ln 3 + \frac{-7720}{120}$$

Et 5) a - i) La partie courbe va de $x=2$ à $x=12$, ce qui justifie les bornes de l'intégrale.

On a : i), $f'(x) = \frac{100 - x^2}{20x}$ (question 1a)

Donc $L = \int_2^{12} \sqrt{1 + \frac{(100 - x^2)^2}{20^2 x^2}} dx = \int_2^{12} \sqrt{1 + \frac{100^2 - 200x^2 + x^4}{400x^2}} dx$

$$L = \int_2^{12} \sqrt{\frac{400x^2 + 100^2 - 200x^2 + x^4}{400x^2}} dx = \int_2^{12} \sqrt{\frac{200x^2 + x^4 + 100^2}{400x^2}} dx = \int_2^{12} \sqrt{\frac{(x^2 + 100)^2}{400x^2}} dx$$

c'est à-dire $L = \int_2^{12} \frac{x^2 + 100}{20x} dx = \int_2^{12} \left(\frac{x^2}{20x} + \frac{100}{20x} \right) dx = \int_2^{12} \left(\frac{x}{20} + \frac{5}{x} \right) dx$
 ce qu'il fallait montrer.

$$i)) L = \int_2^{12} \frac{x}{20} dx + \int_2^{12} \frac{5}{x} dx = \frac{1}{20} \int_2^{12} x dx + 5 \int_2^{12} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{20} \left[\frac{x^2}{2} \right]_2^{12} + 5 \left[\ln x \right]_2^{12}$$

$$L = \frac{1}{20} \frac{12^2 - 2^2}{2} + 5(\ln 12 - \ln 2) = \frac{1}{20} \frac{144 - 4}{2} + 5(2\ln 2 + \ln 3 - \ln 2)$$

$$L = \frac{140}{40} + 5(\ln 2 + \ln 3) = \frac{2 \times 70}{2 \times 20} + 5 \ln(2 \times 3) = \frac{7}{2} + 5 \ln 6, \text{ ce qui}$$

est exactement l'expression qui était demandée en inter. 12 / 19.

Concours/Examen : PLPA

Epreuve : Disciplinaire appliquée N° sujet :

Section-option/Spécialité/BAP/Domaine : mathématiques - physique - chimie

CONSIGNES

- Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.
- Indiquer le n° du sujet quand l'épreuve comporte plusieurs sujets au choix.
- Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.
- Numéroté chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) et placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre.
- Rédiger avec un stylo à encre noire.
- N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.

restituait les deux termes.

b - L'aire de la surface du prisme a été calculée en question 4 d :

$$\int_2^{12} f(x) dx = 110 \ln 2 + 5 \ln 3 - \frac{772}{12} \quad (\text{je reprends mon calcul})$$

Donc comme la hauteur est de 2,80 m et que les longueurs sont 10, $f(2)$ et $f(12)$ on a aussi :

$$10 \times 2,80 + f(2) \times 2,80 + f(12) \times 2,80 = 2,8 \left(10 + 5 \ln 2 - \frac{4}{10} + 5 \ln 12 - \frac{14}{10} \right)$$

$$= 28 + 5 \times 2,8 \ln 2 - 0,28 + 5 \times 2,8 \ln 12 - 2,8 \times \frac{72}{20} \text{ de m}^2 \text{ auxquels il faut soustraire les surfaces de la porte d'entrée et des six fenêtres soit } 2,1 \times 1,5 + 6 \times 1,4 \times 1,2 = 13,23 \text{ m}^2$$

~~On doit doubler $\int_2^{12} f(x) dx$~~

Il faut compter la partie arrondie aussi. c'est L sa longueur.

Donc, sans compter le toit et le sol (donc les murs), la surface totale à peindre est égale à :

$$\left(5 \ln 6 + \frac{7}{2} \right) \times 2,8 + 28 + 5 \times 2,8 \ln 2 - 0,28 + 5 \times 2,8 \ln 12 - 2,8 \times \frac{36}{10} - 13,23$$

$$= 2,8 \times 5 \ln 6 + 2,8 \times 5 \ln 12 + 5 \times 2,8 \ln 2 + 3,5 \times 2,8 + 28 - 2,8 \times 3,6 - 0,28 - 13,23$$

$$\text{Soit } 5 \times 2,8 (\ln 2 + \ln 6) + 2,8 \times 5 \ln 12 + 9,8 + 28 - 10,08 - 0,28 - 13,23$$

$$\text{Ainsi : } 2,8(5 + 5) \ln 12 + 14,21 = 28 \ln 12 + 14,21 \text{ m}^2 \text{ après simplification } 13 / 19.$$

c - Un élève de classe de 4^{ème} ou de 3^{ème} de l'Enseignement Agricole peut résoudre un problème de proportionnalité soit :

- à l'aide du retour à l'unité ;
- du coefficient de proportionnalité.

Ici, il peut, connaissant la quantité de peinture pour 1 m^2 , la multiplier par la même quantité que la surface totale à peindre (retour à l'unité)

Pour donner un autre exemple. Soit une serre de 20 m^2 .

On sait que les produits d'entretien coûtent $2 \text{ €} / 4 \text{ m}^2$. Quel est le coût de l'entretien de la serre ?

La situation peut se résumer ainsi :

surface	20	4
prix	?	2

Avec la méthode coefficient de proportionnalité, l'élève de 4^{ème} ou de 3^{ème} va calculer que le coefficient de proportionnalité est $\frac{4 \text{ (m}^2\text{)}}{2 \text{ (€)}} = 2 \text{ (m}^2\text{/€)}$.
Il va ensuite l'utiliser sur la valeur 20 pour déterminer le prix correspondant : $\frac{20}{2} = 10 \text{ €}$

Avec la méthode de retour à l'unité, l'élève va tenter de déterminer le prix pour entretenir 1 m^2 de la serre. Comme pour 4 m^2 , j'ai besoin de 2 € , alors pour quatre fois moins de m^2 , j'ai besoin de quatre fois moins d'euros, soit $\frac{2 \text{ €}}{4} = 0,5 \text{ €}$.

Il va ensuite calculer le prix pour 20 m^2 . 20 m^2 , c'est 20 fois plus que 1 m^2 . Donc comme le prix d' 1 m^2 est $0,5\text{€}$, pour 20 fois plus de m^2 , j'ai besoin de 20 fois plus d'euros, soit $20 \times 0,5\text{€} = 10\text{€}$.

ii)) 28 En $12 + 14,21 \approx 83,79 \text{ m}^2$ sont à peindre

Il faudra 4 pots, car pour être sûr de pouvoir peindre les $83,79 \text{ m}^2$, il faut $25 \times 4 = 100 \text{ m}^2$ potentiels de première couche. Cela signifie toutefois que, avec les $5 \text{ m}^2 \times 2 = 10 \text{ m}^2$ supplémentaires des autres couches, on peut peindre $4 \times 10 = 40 \text{ m}^2$ en plus, soit $100 + 40 = 140 \text{ m}^2$, mais aussi en ajoutant $4 \times 25 \times 2 = 100 \times 2 = 200 \text{ m}^2$, soit 340 m^2 en tout.

On peut donc prendre moins de pots. En réalité, si on ne respecte pas les règles sur les couches 1 seul pot suffit puisque $30 \times 2 + 25 \times 83,79 > 84 > 83,79 \dots$

Mais si on respecte les couches on est obligé de prendre 4 pots car la différence (40 m^2) ne compense pas 3 pots?

iii))) Avec un produit en croix:

$$\frac{(28 \ln 12 + 14,21)^{\text{m}^2} \times 100 \text{ min}}{26 \text{ m}^2} = 322 \text{ min, soit}$$

$$60 \times 5 + 22 \text{ min, soit } 5 \text{ h } 22 \text{ min.}$$

Problème 2

Partie A

$$1) \frac{1}{3} = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{6}{10}} = \frac{\text{probabilité que Chloé et Thomas soient tirés}}{\text{probabilité de ne pas être tiré}}$$

2) a- $X \sim \mathcal{B}(36; \frac{2}{15})$ puisque chaque jour, le même processus de sélection est répété et qu'il y a 36 jours. Les probabilités précédentes sont donc reportées d'un jour sur l'autre. $p = \frac{2}{15}$

$$\begin{aligned} b- P(X < 5) &= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) \\ &= \sum_{k=0}^4 \binom{36}{k} p^k (1-p)^{36-k} = 1 \times \left(\frac{2}{15}\right)^0 \left(\frac{13}{15}\right)^{36} + 36 \times \left(\frac{2}{15}\right)^1 \left(\frac{13}{15}\right)^{35} + 630 \left(\frac{2}{15}\right)^2 \left(\frac{13}{15}\right)^{34} + 7140 \left(\frac{2}{15}\right)^3 \left(\frac{13}{15}\right)^{33} \\ &\quad + 58905 \left(\frac{2}{15}\right)^4 \left(\frac{13}{15}\right)^{32} = 0,4166 \end{aligned}$$

c - C'est l'espérance de la loi $\mathcal{B}$.

$$\mathbb{E}(X) = 36 \times \frac{2}{15} = \frac{72}{15} = 4,8$$

En moyenne, Chloé et Thomas tiendront ensemble la cafétéria 5 jours sur les 36.

3) Une loi binomiale est la répétition de lois de Bernoulli indépendantes et de même loi.

Ainsi la loi $\mathcal{B}(n; p)$ est la somme de lois indépendantes et identiquement distribuées $\mathcal{B}(p)$ (où chacune ajoute 1 si il y a succès et 0 sinon, alors que $\mathcal{B}(n; p)$ a compte la totalité des occurrences de succès, donc n au maximum).

Concours/Examen : PLPA Épreuve : Disciplines appliquées N° sujet :

Section-option/S spécialité/BAP/Domaine : mathématiques - physique - chimie

CONSIGNES

- Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.
- Indiquer le n° du sujet quand l'épreuve comporte plusieurs sujets au choix.
- Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.
- Numéroté chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) et placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre.
- Rédiger avec un stylo à encre noire.
- N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.

Donc si Y est une ~~loi~~ variable aléatoire suivant une loi binomiale $B(n; p)$ et $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ~~est~~ sont n variables aléatoires indépendantes et suivant toutes la loi $B(p)$, et que l'on sait que les X_i ont toutes pour espérance p ^{et variance $p(1-p)$} alors

$Y = \sum_{i=1}^n X_i$ a pour espérance, par indépendance des X_i entre elles,

$$\begin{cases} E(Y) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \\ V(Y) = V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \end{cases}, \begin{cases} E(Y) = \sum_{i=1}^n E(X_i) \\ V(Y) = \sum_{i=1}^n V(X_i) \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} E(Y) = \sum_{i=1}^n p \\ V(Y) = \sum_{i=1}^n p(1-p) \end{cases}$$

Soit $\begin{cases} E(Y) = np \\ V(Y) = np(1-p) \end{cases}$

Partie B

1) Aucun point n'appartient à la droite.

2)

3)

4)

$$5) \hat{y} < 10 \Leftrightarrow e^{-0,0164x + 4,85} + 3 < 10$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,0164x + 4,85} < 7$$

$$\Leftrightarrow -0,0164x + 4,85 < \ln 7 \quad \text{car } \begin{cases} x \mapsto \ln x \text{ est une fonction} \\ x > 0 \end{cases} \text{ strictement croissante}$$

$$\Leftrightarrow -0,0164x < \ln 7 - 4,85$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{\ln 7 - 4,85}{-0,0164}$$

$$\Leftrightarrow x > 177,08$$

Il faudrait introduire 178 larves de coccinelles pour que le nombre de colonies de pucerons éliminées soit inférieur à 10 avec cette modélisation. C'est cohérent avec les données de l'énoncé.

6) Pour la question 1: chercher puisqu'il y a expérimentation avec la calculatrice graphique et validation/invalidation du modèle

Pour la question 2: calculer (il faut connaître les formules des coefficients de corrélation linéaire) et communiquer puisqu'il y a critique d'un résultat

Pour la question 3: calculer (il faut minimiser la somme des carrés des écarts à la moyenne, ce qui nécessite l'étude d'une fonction, c'est comme un algorithme).

Pour la question 4: calculer (pour repasser aux données de base après la transformation) et modéliser pour traduire la situation de base

en langage mathématique

Pour la question 5 : calculer (résolution d'inéquation) et communiquer
car il faut passer du langage naturel au langage mathématique
formel en utilisant la modélisation.

Partie C

Concours/Examen : PLPA

Épreuve : Disciplinaire appliquée N° sujet :

Section-option/Spécialité/BAP/Domaine : mathématiques - physique - chimie

CONSIGNES

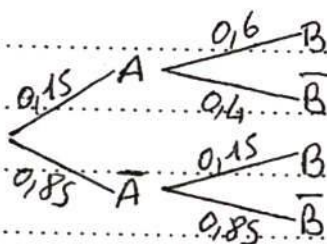
- Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.
- Indiquer le n° du sujet quand l'épreuve comporte plusieurs sujets au choix.
- Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.
- Numéroté chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) et placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre.
- Rédiger avec un stylo à encre noire.
- N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.

ANNEXE

PLPA / 4EME CATEGORIE MATHÉMATIQUES PHYSIQUE CHIMIE

Copie d'un élève

1) La situation sur les deux premières années se modélise par l'arbre suivant :



Parcours qui sont les événements.

A et B

A : la parcelle est visitée la première année ; B : la seconde

2) Avec l'arbre, on voit que :

• si on a A, alors $P(B) = 0,6$... Non, c'est plus

• si on a $\bar{A}$, alors $P(B) = 0,15$... implique que ça

donc $P(B) = \frac{0,6 + 0,15}{2} = \frac{0,75}{2} = 0,375$... Il faut

utiliser les probabilités totales : $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$
 $= P(A) \times P(B) + P(\bar{A}) \times P(B)$
 $= 0,15 \times 0,6 + 0,85 \times 0,15$
 $= 0,2175$

3) La probabilité que les lapins viennent les deux années est, en regardant l'arbre :

$$P(A) \times P(B) = 0,15 \times 0,6 = 0,09$$

Qui

$$4) P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,09}{0,2175} = 0,414$$

$P(A \cap B)$

raisonnement correct malgré l'erreur de la question 2

