



**MINISTÈRE  
DE L'AGRICULTURE,  
DE L'AGRO-ALIMENTAIRE  
ET DE LA SOUVERAINETÉ  
ALIMENTAIRE**

*Liberté  
Égalité  
Fraternité*

**CONCOURS D'ACCÈS AU CORPS DE PROFESSEURS CERTIFIÉS DE L'ENSEIGNEMENT  
AGRICOLE ET À LA DEUXIÈME CATÉGORIE DES EMPLOIS DE PROFESSEUR DES  
ÉTABLISSEMENTS D'ENSEIGNEMENT AGRICOLE PRIVÉ**

Concours : **EXTERNE**

Section : **MATHEMATIQUES**

**SESSION 2026**

**ÉPREUVE ÉCRITE D'ADMISSIBILITÉ N°1**

**Épreuve écrite disciplinaire**

(Coefficient : 2 – Durée : 5 heures)

Matériel(s) et documents(s) autorisé(s) : **Calculatrice**

Ce sujet comporte 9 pages y compris celle-ci.

Vérifiez que l'exemplaire qui vous a été remis est complet.

Si ce n'est pas le cas, signalez-le aussitôt.

Cette épreuve est constituée de trois problèmes indépendants.

### Notations.

$\mathbb{N}$  désigne l'ensemble des nombres entiers naturels.

$\mathbb{N}^*$  désigne l'ensemble des nombres entiers naturels non nuls.

$\mathbb{R}$  désigne l'ensemble des nombres réels.

$\mathbb{C}$  désigne l'ensemble des nombres complexes.

$\llbracket 0, n \rrbracket$  désigne l'ensemble des entiers compris entre 0 et  $n$  inclus,  $n$  étant un entier naturel donné.

## Problème 1 : VRAI / FAUX

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

1. Soit  $n$  un entier naturel.

**Affirmation** : Si  $n^2$  est impair alors  $n$  est impair.

2. **Affirmation** : Pour tout entier naturel  $n \geq 2$ ,  $(1 - \frac{1}{2^2}) \times (1 - \frac{1}{3^2}) \times \dots \times (1 - \frac{1}{n^2}) = \frac{n+1}{2n}$ .

3. Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  une fonction définie sur  $I$  à valeurs dans  $I$  et  $(u_n)$  la suite définie par la donnée de  $u_0 \in I$  et :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ .

**Affirmation** : Si  $f$  est croissante sur  $I$  alors  $(u_n)$  est croissante.

4. **Affirmation** : Il n'existe qu'un couple de réels  $(x, y)$  tels que  $x^2 + y^2 = xy$ .

5. **Affirmation** : L'équation  $e^{2x} + e^x - 2 = 0$  possède deux solutions réelles distinctes.

6. **Affirmation** : L'équation  $1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = x$  admet une unique solution dans l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

7. Soit  $f$  la fonction définie sur  $] -1; +\infty[$  par  $f(x) = \ln(1+x)$  et  $g$  et  $h$  les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = e^x - 1$  et  $h(x) = g(2x) - 1$ .

**Affirmation** :  $\forall x \in ]0; +\infty[, (f \circ h)(x) = \ln(e^{2x} - 1)$ .

8. Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $\mathbb{R}$ .

**Affirmation** :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)g(x) = 0 \implies \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \text{ ou} \\ \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0 \end{cases}$ .

9. Soit  $a$  un réel strictement positif et  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f : x \mapsto a^x$ .

**Affirmation** : La dérivée de  $f$  est  $f' : x \mapsto xa^{x-1}$ .

10. On considère la fonction  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $g(x) = \int_{1/x}^x \frac{e^t}{t} dt$ .

**Affirmation** :  $g$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et  $\forall x \in ]0; +\infty[, g'(x) = \frac{e^x}{x} - xe^{\frac{1}{x}}$ .

11. Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$  ( $a < b$ ) vérifiant :

$$\forall x \in [a, b], f(a + b - x) = f(x).$$

**Affirmation** :  $\int_a^b xf(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx$ .

12. **Affirmation** : L'ensemble des solutions, définies sur  $\mathbb{R}$ , de l'équation différentielle  $y'' - 2y' + y = 0$  est :

$$S = \left\{ f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto ke^x \end{array}, k \in \mathbb{R} \right\}.$$

13. Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , on définit  $Z = z\bar{z} + z(2+i) + \bar{z}(2+3i) + 1$ .

**Affirmation** : Dans le plan complexe, l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $Z$  est imaginaire pur est un cercle de centre  $I$  d'affixe  $2+i$ .

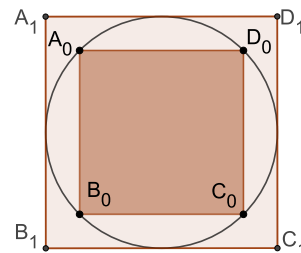
14. Soit  $ABC$  un triangle tel que  $AC = 4, BC = 3$  et  $\widehat{ACB} = 30^\circ$ .

**Affirmation** :  $AB = \frac{41}{20}$ .

Soit  $A_0B_0C_0D_0$  un carré de côté 1.

Le cercle  $(C)$  est le cercle circonscrit à  $A_0B_0C_0D_0$ .

15. On construit un carré  $A_1B_1C_1D_1$  de telle sorte que  $(C)$  soit son cercle inscrit. Le procédé se reproduit pour construire une suite de carrés  $A_2B_2C_2D_2, A_3B_3C_3D_3, \dots, A_nB_nC_nD_n$  de sorte que le cercle circonscrit d'un carré devient le cercle inscrit du carré suivant.



**Affirmation** : L'aire du carré  $A_{2024}B_{2024}C_{2024}D_{2024}$  est  $2^{2024}$ .

16. Dans l'espace affine euclidien, muni d'un repère cartésien orthonormé, le plan  $P$  a pour équation :  $x - y + 2z = 1$ .

- (a) **Affirmation** : La droite  $(D)$  passant par le point  $A(2,1,0)$  et de vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  est incluse dans  $P$ .

(b) On considère la droite  $(D_1)$  de représentation paramétrique  $\begin{cases} x = t \\ y = -t + 1 \\ z = 2t - 3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

**Affirmation :** La droite  $(D_1)$  est orthogonale à  $P$ .

17. Soit  $ABCD$  un quadrilatère. On désigne par  $\Gamma_1$  l'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$  et par  $\Gamma_2$  l'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = 0$ .

**Affirmation :**  $(ABCD \text{ est un rectangle}) \iff (\Gamma_1 = \Gamma_2).$

## Problème 2 : La transmission génétique

En élevage bovin, les éleveurs préfèrent les animaux qui n'ont pas de cornes afin de limiter les risques de blessures, mais la majorité des races élevées ont des cornes. L'écornage est souvent pratiqué, mais il présente des risques sanitaires. De plus en plus d'éleveurs, sensibles au bien-être animal, se tournent donc vers la sélection de bovins qui naissent sans cornes.

Le gène associé aux cornes peut exister sous deux versions ou allèles : “sans cornes” (noté P comme “polled”) et “avec cornes” (noté h comme “horned”). Chaque bovin possède deux allèles du gène des cornes : l'un hérité du père et l'autre de la mère. P-h et h-P correspondent au même matériel génétique. Un bovin peut donc avoir seulement l'un des trois génotypes suivants P-P, P-h ou h-h. La probabilité de transmission d'un allèle à un descendant est égale à  $\frac{1}{2}$ .

Les bovins qui n'ont pas de cornes sont dits de phénotype “sans cornes” [P]. Ils peuvent être de deux génotypes différents : P-P (“true polled” : sans cornes homozygote) ou P-h (“polled” : sans cornes hétérozygote). L'expression de l'allèle P l'emporte sur l'expression de l'allèle h : on dit que l'allèle P est dominant et que l'allèle h est récessif. Les bovins qui ont des cornes sont dits de phénotype “avec cornes” [h] ; ils sont tous de génotype h-h.

1. Un veau a des parents qui ont pour génotype P-h et P-h. Une simulation est réalisée pour déterminer 100 génotypes de veaux issus de tels parents. On répète dix fois cette simulation en comptant à chaque fois le nombre de veaux ayant un génotype défini comme l'indique la capture d'écran ci-dessous :

|     | A          | B | C | E | F         | G   | H   | I               |
|-----|------------|---|---|---|-----------|-----|-----|-----------------|
| 1   | Simulation |   |   |   | Génotypes |     |     |                 |
| 2   | Veau n°1   | P | P |   | P-P       | P-h | h-h |                 |
| 3   | Veau n°2   | P | h |   | 26        | 51  | 23  | Simulation n°1  |
| 4   | Veau n°3   | h | P |   | 32        | 37  | 31  | Simulation n°2  |
| 5   | Veau n°4   | h | P |   | 29        | 42  | 29  | Simulation n°3  |
| 6   | Veau n°5   | P | P |   | 24        | 48  | 28  | Simulation n°4  |
| 7   | Veau n°6   | h | h |   | 22        | 52  | 26  | Simulation n°5  |
| 8   | Veau n°7   | P | h |   | 26        | 50  | 24  | Simulation n°6  |
| 9   | Veau n°8   | P | P |   | 20        | 48  | 32  | Simulation n°7  |
| 10  | Veau n°9   | P | P |   | 23        | 55  | 22  | Simulation n°8  |
| 11  | Veau n°10  | P | P |   | 34        | 40  | 26  | Simulation n°9  |
| 12  | Veau n°11  | h | P |   | 18        | 53  | 29  | Simulation n°10 |
| 13  | Veau n°12  | P | h |   |           |     |     |                 |
| 14  | Veau n°13  | h | h |   |           |     |     |                 |
| 97  | Veau n°96  | P | h |   |           |     |     |                 |
| 98  | Veau n°97  | P | h |   |           |     |     |                 |
| 99  | Veau n°98  | P | h |   |           |     |     |                 |
| 100 | Veau n°99  | P | h |   |           |     |     |                 |
| 101 | Veau n°100 | h | P |   |           |     |     |                 |

- Donner une formule à saisir en B2 et à recopier jusqu'en C101 pour réaliser une telle simulation.
- Déterminer la probabilité que le génotype de ce veau soit P-P, la probabilité que le génotype de ce veau soit P-h et la probabilité que le génotype de ce veau soit h-h.
- Les résultats des dix simulations sont-ils cohérents avec les résultats obtenus dans la question précédente? Justifier les éventuels écarts.

Dans la suite du problème, on note  $a$ ,  $b$  et  $c$  les proportions respectives des vaches de génotypes P-P, P-h ou h-h dans la population. On considère que ces génotypes sont répartis selon les mêmes proportions  $a$ ,  $b$  et  $c$  chez les taureaux. Dans les questions suivantes, on pourra se servir d'un arbre de probabilité ou d'un tableau à double entrée pour justifier son résultat.

- On choisit au hasard, dans la population de départ, une vache de phénotype [P] et un taureau de phénotype [H].
  - Justifier que la probabilité que la vache soit de génotype P-P est égale à  $\frac{a}{a+b}$  et que la probabilité qu'elle soit de génotype P-h est égale à  $\frac{b}{a+b}$ .
  - On effectue l'insémination de cette vache par ce taureau. Déterminer la probabilité que le génotype du veau à naître soit P-P, la probabilité que le génotype de ce veau soit P-h et la probabilité que le génotype de ce veau soit h-h.
- On choisit au hasard, dans la population de départ, une vache de phénotype [P] et un taureau de phénotype [P]. On effectue l'insémination de cette vache par ce taureau.  
Déterminer la probabilité que le génotype du veau à naître soit P-P, la probabilité que le génotype de ce veau soit P-h et la probabilité que le génotype de ce veau soit h-h.
- On choisit au hasard, dans la population de départ, une vache et un taureau. On effectue l'insémination de cette vache par ce taureau.  
Déterminer la probabilité que le génotype du veau à naître soit P-P, la probabilité que le génotype de ce veau soit P-h et la probabilité que le génotype de ce veau soit h-h.

## Problème 3 : La transmission d'une information

### Notations, conventions et rappels.

Pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , on définit la **factorielle de n**, notée  $n!$ , par :

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n = \prod_{k=1}^n k & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $\binom{n}{k}$  le coefficient binomial défini, pour  $0 \leq k \leq n$ , par :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels. On rappelle et on admet la formule du **binôme de Newton** :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

### Partie A - Préliminaires

1. On propose ci-dessous le script, écrit en langage Python, de la fonction **factorielle**. Corriger ce script pour que **factorielle(n)** renvoie la valeur  $n!$  pour un entier naturel  $n$  donné.

```
1 def factorielle(n):
2
3     if n=0:
4         return 1
5     else :
6         f=1
7         for i in range(n):
8             f=f*i
9     return f
10
```

2. Ecrire une fonction Python, appelée **coefbinom**, utilisant la fonction **factorielle** définie ci-dessus, qui renvoie la valeur de  $\binom{n}{k}$  pour des entiers naturels  $n$  et  $k$  donnés.
3. Montrer que si  $n$  est un entier naturel non nul alors pour tout entier naturel  $k$  tel que  $0 < k \leq n$ , on a :

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}.$$

4. Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$  (où  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in ]0; 1[$ ) ; son espérance mathématique est notée  $E[X]$ .

Montrer que  $E[X] = np$ .

5. Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $f_n$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}e^{-x}$ .

Soit  $a > 0$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $I_n(a) = \int_0^a f_n(x) dx$ .

(a) Calculer  $I_0(a)$ .

(b) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n(1) \leq \frac{1}{(n+1)!}$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(1)$ .

(c) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n(a) = -\frac{a^n}{n!}e^{-a} + I_{n-1}(a)$ .

(d) En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n(a) = 1 - \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!}e^{-a}$ .

(e) Montrer que la suite  $(u_n)$  de terme général  $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$  converge et que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e$ .

(f) Montrer que pour tout  $n > 0$ ,  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{n \times n!}$  et en déduire que  $|u_n - e| \leq \frac{1}{n \times n!}$ .

- (g) Indiquer ce que fait la fonction suivante écrite en langage Python et appelant la fonction **factorielle** définie dans la question 1 de la partie A.

```
1 def fonction (s) :  
2     n=1  
3     u=1  
4     while (1/(n*factorielle(n)))>s :  
5         n=n+1  
6         u=u+1/factorielle(n)  
7     return u  
8
```

## Partie B - Transmission

### Introduction

Dans la suite du problème, on s'intéresse à la transmission d'une information binaire (ne pouvant donc prendre que deux valeurs). On admet que le procédé de transmission directe entre deux individus A et B est tel que lorsque A émet une valeur de l'information à destination de B, ce dernier reçoit la valeur émise par A avec la probabilité  $p$  ou reçoit, à tort, l'autre valeur avec la probabilité  $1 - p$  où  $p$  est un réel vérifiant  $0 < p < 1$ .

### Partie B.1 - Transmission directe

Soit  $n$  un entier naturel non nul. Un individu A émet l'information binaire à  $n$  individus qui reçoivent tous une valeur, les valeurs reçues par ces individus sont indépendantes. On note  $N$  la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre d'individus ayant reçu la valeur émise par A.

1. Justifier que  $N$  suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Dans cette question uniquement, A transmet l'information à 80 individus et on suppose qu'un individu reçoit la valeur émise par A avec la probabilité  $p = \frac{3}{4}$ .
  - (a) Donner, en moyenne, le nombre d'individus ayant reçu l'information effectivement émise par A.
  - (b) Déterminer la valeur arrondie à  $10^{-3}$  de la probabilité qu'au moins 70 individus aient reçu la bonne information.

### Partie B.2 - Transmission avec intermédiaire

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

On considère les individus successifs  $i_0, i_1, \dots, i_n$ . L'information émise par  $i_0$  est transmise à  $i_1$  qui transmet la valeur reçue à  $i_2, \dots$ , ainsi de suite jusqu'à  $i_n$ .



Entre deux individus  $i_k$  et  $i_{k+1}$ ,  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , la transmission de l'information se fait selon la règle décrite dans le cas d'une transmission directe entre deux individus (évoquée dans l'introduction de la **partie B**).

Pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , on note  $p_k$  la probabilité que la valeur de l'information reçue par  $i_k$  soit identique à celle émise par  $i_0$  et on pose  $p_0 = 1$ .

1. Montrer que, pour tout entier  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $p_{k+1} = (2p-1)p_k + 1-p$ .
2. Calculer, pour tout entier  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $p_{k+1} - \frac{1}{2}$  en fonction de  $p_k - \frac{1}{2}$ .
3. En déduire l'expression de  $p_n$  en fonction de  $n$ .
4. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$ . Interpréter ce résultat dans le contexte de cette partie.

### Partie B.3 - Transmission sans intermédiaire

**Rappels et notations.** On admet que pour tout réel  $x$  :

- la série  $\sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!}$  converge et on note  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = e^x$ .
- la série  $\sum_{k \geq n+1} \frac{x^k}{k!}$  converge et on note  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^p \frac{x^k}{k!}$

Dans cette partie, l'individu  $i_0$  émet l'information à destination directe (c'est à dire sans l'intermédiaire d'autres individus) d'une infinité d'individus  $\{i_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$  dont une partie se trouve "à l'écoute".

On admet que le nombre  $X$  d'individus à l'écoute suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ , où  $\lambda > 0$ , c'est à dire que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ .

Entre  $i_0$  et chacun des individus à l'écoute, la transmission de l'information se fait selon la règle décrite dans l'introduction.

1. Soit  $n$  un entier naturel non nul et  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Lorsque  $n$  individus sont à l'écoute, déterminer la probabilité pour que  $k$  personnes exactement reçoivent la valeur de l'information émise par  $i_0$ .
2. Soit  $Y$  la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre d'individus recevant la valeur de l'information émise par  $i_0$ .
  - (a) Montrer que  $\mathbb{P}(Y = k) = \frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!}$ .
  - (b) En déduire que la loi de  $Y$  est la loi de poisson de paramètre  $\lambda p$ .
  - (c) Déterminer, en fonction de  $p$  et  $\lambda$ , la probabilité pour qu'aucun individu ne reçoive la valeur de l'information émise par  $i_0$  (c'est à dire qu'aucun individu ne soit à l'écoute ou que tous les individus à l'écoute reçoivent l'autre valeur de l'information).

— FIN DU SUJET —